# ١٠



حكومة إقليم كوردستان ـ العراق
وزارة التربية ـ المديرية العامة للمناهج والمطبوعات

# الرياضيات للجميع

## كتاب الطالب
## الصف العاشر العلمي

الطبعة الثامنة
٢٠١٥م / ٢٧١٥ كوردي / ١٤٣٦ هـ

الأشراف الفني على الطبع
عثمان پيرداود كواز
آمانج اسماعيل عبدي

Content-Student-arbil-13 5/10/13 10:14 AM Page 1

# محتوى الكتاب

# محتوى الكتاب

## 1 الأعداد والعمليات NUMBERS AND OPERATIONS 2





## 2 الدوال FUNCTIONS 50





## 3 المقادير والدوال التربيعية
## QUADRATIC EXPRESSIONS AND FUNCTIONS 102





## 4 المقادير والدوال الحدودية
## POLYNOMIAL EXPRESSIONS AND FUNCTIONS 144



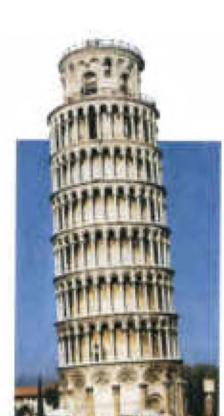


# 5 المقادير والدوال النسبية

## 180 RATIONAL EXPRESSIONS AND FUNTIONS







# 6 الاحتمال والإحصاء

## 224 PROBABILITY AND STATISTICS





## 7 الهندسة Geometry 268







## 8 علم المثلثات TRIGONOMETRY 322





## الفصل الأول

# الأعداد والعمليات

1. العمليات على الأعداد.
2. المُعادلات.
3. المُتباينات.
4. القُوى والجذور.
5. حلُّ نظام معادلات خطِّية بالتعويض.
6. حلُّ نظام معادلات خطِّية بالحذف.
7. المقادير الجذرية.

مشروع الفصل

مراجعة

اختبار الفصل

اختبار تراكمي

الفصل

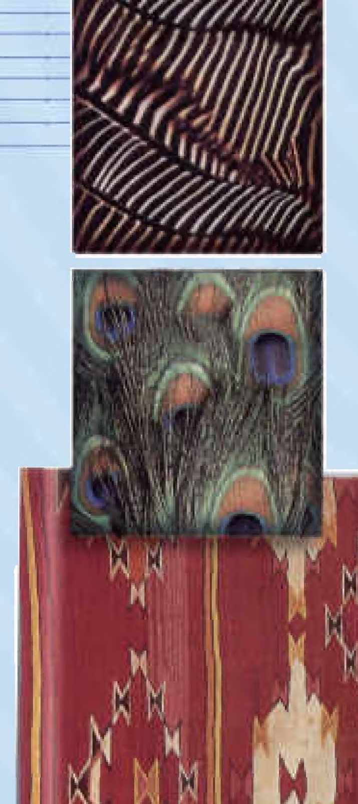
1

# الأعداد والعمليات

## Numbers and Operations

استرعت الأنماط عبر العصور انتباه البشرية في مختلف البلدان وصولاً إلى اعتقاد البعض بسحرها. فالحضارات القديمة، ومنها الحضارات في بلاد ما بين النهرين وشرق المتوسط وشمال أفريقيا وغرب أمريكا، عرفت أنماطًا تركت آثارًا على حياتها. وتشهد العديد من آثارها الفنية على تقدير عميق لجمال هذه الأنماط.

توفِّر الأنماط في عالم التكنولوجيا الحديثة قواعد للعديد من الاكتشافات في العلوم والرياضيات. يستعمل العلماء الأنماط لدراسة الطبيعة وفهمها وتخمين المجهول فيها. كما يبحث علماء الرياضيات عن أنماط منتظمة لدى دراستهم للأعداد. يمكن للأنماط أن توفِّر أداة فعّالة لحل المسائل.



الدروس

يستعمل الجيولوجيون آلة رصد الزلازل لتسجيل أنماط قوتها.

## حول مشروع الفصل

يساعد اكتشاف الأنماط في معطيات مسألة على حلِّها. يوفِّر الجبر أدوات تساعدك على التعميم والتخمين اعتمادًا على الأنماط. سوف تتعرَّف في مشروع هذا الفصل أنماطًا رياضية في المستطيلات الذهبية، وفي مجموعة من الأشكال الدائرية. بعد الانتهاء من هذا المشروع يصبح بإمكانك:

- تحليل الأنماط في المعطيات، باستعمال الجداول والنقاط البيانية.



الدرس 1

# العمليات على الأعداد

## Operations With Numbers

**الأهداف**

- يميِّز مختلف مجموعات الأعداد والعلاقات بينها.
- يتعرَّف خواصَّ العمليات على الأعداد الحقيقية ويستعملها.
- يحسب قيمة مقدار عددي باستعمال تراتب العمليات.



**لماذا**

نستعمل في حياتنا اليومية أعدادًا من مختلف الأنواع. نستعمل الأعداد الصحيحة، مثل 32 درجة، للتعبير عن حرارة الجو. ونستعمل أعدادًا عشرية مثل 41.25 ألف دينار، للتعبير عن سعر سلعة ما.

تعرّفت في الصفوف السابقة أنواعًا مختلفة من الأعداد.

**مجموعات الأعداد Sets of Number**

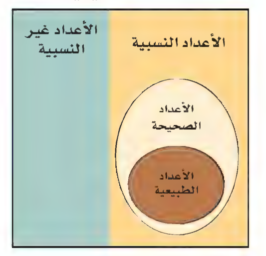
**الأعداد الطبيعية Natural Numbers $\mathbb{N}$** $0; 1; 2; 3; 4; \dots$

**الأعداد الصحيحة Integers $\mathbb{Z}$** $\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots$

**الأعداد النسبية Rational Numbers $\mathbb{Q}$** $\frac{a}{b}$ ، حيث $a$ وَ $b$ عددان صحيحان وَ $b \neq 0$.

**الأعداد غير النسبية Irrational Numbers** هي الأعداد التي يكون جزؤها الواقع إلى يمين النقطة العشرية غير منتهٍ وغير دوري.

**الأعداد الحقيقية Real Numbers $\mathbb{R}$** جميع الأعداد النسبية وغير النسبية.




يبيّن مخطط فن (Venn) إلى اليمين العلاقات التي تربط بين مختلف مجموعات الأعداد. للتفريق بين الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية، تذكّر أن الجزء العشري للأعداد النسبية، أي الواقع إلى يمين الفارزة العشرية، يكون منتهيًا أو دوريًّا. إذا كان العدد النسبي دوريًّا، فإنك تكتبه كما هو مبيَّن في المثال التالي: $3.2\overline{16} = 3.2161616\dots$ .

**مثـــــال 1**

**صنِّف الأعداد التالية مع الشرح:**

$-2.77$ ؛ $178.131313\dots$ ؛ $15.121221222\dots$.

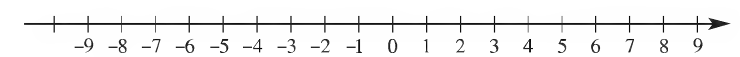
**الحـــل**

العدد الأول نسبيّ، لأن جزءه الواقع إلى يمين النقطة العشرية منتهٍ. العدد الثاني نسبيّ أيضًا لأن جزءه الواقع إلى يمين النقطة العشرية دوري. أما الثالث فهو غير نسبيّ، لأن جزءه الواقع إلى يمين النقطة العشرية غير منتهٍ وغير دوري.

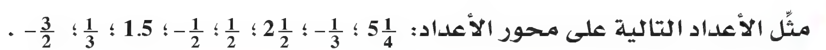


## Number Line محور الأعداد

تتمتَّع مجموعة الأعداد الحقيقية بخاصِّية مهمَّة، إذ يمكنك تمثيل كل عدد حقيقي بنقطة على خط مستقيم موجَّه يُدعى **محور الأعداد**. كما أن كل نقطة على هذا المحور تمثِّل عددًا حقيقيًّا وحيدًا.

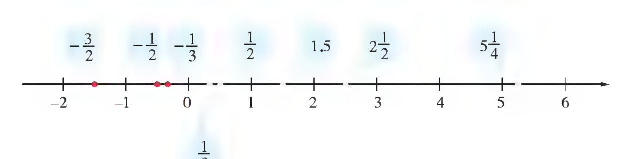



**مثـــــال 2**



**مثِّل الأعداد التالية على محور الأعداد:** $5\frac{1}{4}$ ؛ $-\frac{1}{3}$ ؛ $2\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{1}{2}$ ؛ $-\frac{1}{2}$ ؛ $1.5$ ؛ $\frac{1}{3}$ ؛ $-\frac{3}{2}$ .

**الحــل**




**مثـــــال 3**

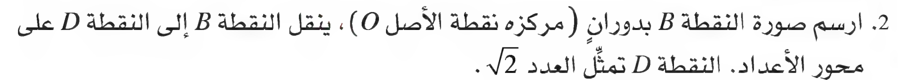
**كيف تمثِّل $\sqrt{2}$ على محور الأعداد؟**



**الحــل**

يدلّ العدد $\sqrt{2}$ على قطر مربّع طول ضلعه 1.
انطلاقًا من هذه الملاحظة، يمكنك القيام بما يلي:

1. ارسم المربّع ABCO.
2. ارسم صورة النقطة $B$ بدوران (مركزه نقطة الأصل $O$)، ينقل النقطة $B$ إلى النقطة $D$ على محور الأعداد. النقطة $D$ تمثِّل العدد $\sqrt{2}$.




**حـــاولْ** هل تستطيع أن تمثِّل العدد $\sqrt{5}$ على محور الأعداد؟ اشرح.

## Operations With Real Numbers العمليات على الأعداد الحقيقية

تساعدك خصائص الجمع والضرب على تنفيذ العمليّات الحسابيّة بسرعة وسهولة.
تتلخّص هذه الخصائص في الجدول التالي:

**خصائص عمليتي جمع الأعداد الحقيقية وضربها**

| الخاصّية | الجمع | الضرب |
|---|---|---|
| **Commutativity التبديل** | $a+b=b+a$ | $a\times b=b\times a$ |
| **Associativity التجميع** | $a+(b+c)=(a+b)+c$ | $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ |
| **Identity حيادية الصفر والواحد** | $a+0=a$ | $a\times 1=a$ |
| **Opporite and Inverse المعكوس والمقلوب** | $a+(-a)=0$ | $b\times\frac{1}{b}=1;\ b\neq 0$ |
| **Distribuvity التوزيع** | $a(b+c)=ab+ac$ | |

**مثــــــال** 4 انشرِ المقدار الجبري $(a+2)\ (3+b)$.

الحــل

$(a+2)(b+3) = a(b+3) + 2(b+3)$ استعمل خاصِّية التوزيع

$= ab + 3a + 2b + 6$ استعمل خاصِّية التوزيع

**حــاولْ** انشر المقدار الجبري $(a+b)\ (c-d)$ معلِّلاً كل خطوة.

**مثــــــال** 5 **عندما يعرض تاجر حسمًا مقداره 25% على سعر سلعة ما، يصبح سعرها الجديد $t = c - 0.25c$ حيث $t$ السعر الجديد وَ $c$ السعر الأصلي. بيِّن أن $t = 0.75c$.**







الحــل

$t = c - 0.25c = 1 \times c - 0.25 \times c = (1 - 0.25)c = 0.75c$.

**حــاولْ** بيِّن أن السعر الجديد لسلعة سعرها الأصلي $c$ بعد رفع الأسعار بنسبة $r\%$ هو $t = \left(1 + \frac{r}{100}\right)c$ .

## تراتب العمليات Order of Operation

لاحتساب قيمة مقدار عددي، عليك إجراء العمليات الحسابية وفق الترتيب التالي:

1. احسب المقادير داخل رموز التجميع، مثل الأقواس والكسور، وفق الخطوات من 2 إلى 4.
2. احسب القوى.
3. اضرب واقسم على التوالي بدءًا من اليسار.
4. اجمع واطرح على التوالي بدءًا من اليسار.

**مثــــــال** 6 **احسب قيمة المقدار $\frac{2^2(12+8)}{5}$ مستعملاً تراتب العمليات.**

الحــل

$\frac{2^2(12+8)}{5} = \frac{2^2 \times 20}{5}$ احسب المقدار الموجود داخل القوسين

$= \frac{4 \times 20}{5}$ احسب القوى

$= \frac{80}{5}$ اضرب

$= 16$ اقسم

الكسر هو رمز تجميع

**حــاولْ** احسب قيمة $\frac{18 - 2 \times 5}{15 + 3(-3)}$ مستعملاً تراتب العمليات.

**تفكير ناقد** طلب المعلم إلى شوان ودلدار وأردلان أن يحسب كلٌّ منهم قيمة المقدار $\frac{2-5}{3-8}$ بواسطة الحاسبة. استعمل كل منهم الحاسبة بطريقة مختلفة. إليك المفاتيح التي ضغط عليها بالتوالي كلّ منهم:

شوان: [8] [-] [3] [÷] [5] [-] [2]

دلدار: [)] [8] [-] [3] [(] [÷] [5] [-] [2]

أردلان: [)] [8] [-] [3] [(] [÷] [)] [5] [-] [2] [(]

استعملِ الحاسبة كما استعملها كل من الطلاب الثلاثة وقارن ما حصلوا عليه. وحدِّد مَنْ مِنَ الثلاثة راعى تراتب العمليات؟

# التمــــــــاريــــــــن

## التواصل في الرياضيات

1 اشرح ما تعنيه لك الكلمات التالية: **تبديل**، **تجميع**، **توزيع**، بشأن عمليَّتَي الجمع والضرب، مقدِّمًا أمثلة توضِّح ما تقول. اشرح كيف تعبِّر كلمة **تبديل** عن الخاصّية التي تحمل هذا الاسم.

## تمارين موجَّهة

2 صنِّف العددين $\frac{2}{3}$ وَ $-2.131331333...$ بكل الطرق الممكنة.

**انشر واكتب كل مقدار على أبسط صورة مبررًا كل خطوة.**

3 $2(a+b)$

4 $-3a+3a$

5 $\frac{3(8+2)}{2}$

6 $\frac{1-7}{2-5}$

7 $\frac{1}{4}(4\times5)$

8 $-5(4y^2)$

**تطبيــــقات**

9 **تجارة** إذا رمز المتغيِّر $a$ إلى القسط السنوي للتأمين على السيارة، ورمز المتغيِّرُ $m$ إلى القسط الشهري، فإن القاعدة $m=\frac{a}{12}+\frac{0.06a}{12}$ تبيِّن كيفية حساب القسط الشهري المتوجّب دفعه. بيِّن أن بإمكانك كتابة القاعدة على الشكل التالي: $m=\frac{1.06a}{12}$ . برِّر كل خطوة تقوم بها.



يقوِّم الخبير الأضرار التي لحقت بالسيارة نتيجة لاصطدامها بأخرى.

**احسب المقدار باستعمال تراتب العمليات.**

10 $5^2+8\div4-2$

11 $(7-3^2)^2$

12 $\frac{5\times6\div3\times7}{12}$

13 $2\left[14-3(6-1)^2\right]$

## تمارين تطبيقية

**صنِّف العدد.**

14 $\sqrt{3}$

15 $\frac{2}{5}$

16 $1.0\overline{63}$

17 $\pi$

18 $\frac{\sqrt{36}}{2}$

19 $\frac{9}{3}$

20 $\frac{15}{2}$

21 $5.121121112...$

**مثِّل العدد على محور الأعداد.**

22 $\frac{13}{2}$

23 $3.\overline{6}$

24 $1.5$

25 $\sqrt{10}$

**احسب المقدار باستعمال تراتب العمليات.**

26 $16\div2\times6-1$

27 $6\div3-(10-3)^2$

28 $30-3\times2+6\div3$

29 $5\times(2-3)^2$

**حدِّد الخاصّية التي استعملت في كل حالة.**

30 $a(3b)=(3b)a$

31 $(25x)y=25(xy)$

32 $(5+3)+2=5+(3+2)$

33 $a+2-x=2-x+a$

34 $\frac{1}{a}\times a=1\ ;\ a\neq0$

35 $\frac{3}{x}\times\frac{x}{3}=1\ ;\ x\neq0$

**36** $-7+7=0$    **37** $2x+(-2x)=0$

**38** $1(3x)=3x$    **39** $63=1\times 63$

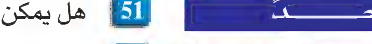
**40** $a(x^2+x)=ax^2+ax$    **41** $2(3-x)=6-2x$

**احسب قيمة المقدار باستعمال الحاسبة البيانيّة.**

**42** $3\times 2^2+3$    **43** $6\div 3\times 2$    **44** $2^2(2+3)+5$

**45** $6\div(3-1)\times 5$    **46** $-3\times 25+16$    **47** $2^{(3-1)}+(3-1)$

**48** $(2^2+1)+4\div 2$    **49** $\frac{8-2}{3}+(2+1)$    **50** $2\times 4+\frac{14}{5+2}$



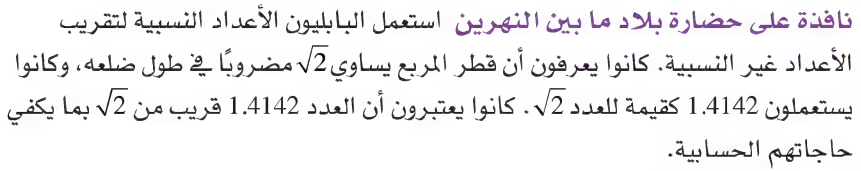
**تحدّ** **51** هل يمكن لعدد ما أن يكون نسبيًّا وغير نسبيٍّ في آنٍ؟

**ربط** **52** هل تستطيع تمثيل العدد $\pi$ على محور الأعداد؟ إشرح.

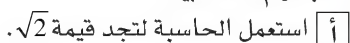
**53** **إحصاء** تريد رانية أن تحسب متوسط الأعداد التالية: 8، 10، 14، 16. أدخلت في حاسبتها ما يلي: $\boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{10}\ \boxed{+}\ \boxed{14}\ \boxed{+}\ \boxed{16}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

وحصلت على 36. هل أصابت رانية؟ اشرح. ما كان عليها أن تدخل في الحاسبة؟

**54** **نافذة على حضارة بلاد ما بين النهرين** استعمل البابليون الأعداد النسبية لتقريب الأعداد غير النسبية. كانوا يعرفون أن قطر المربع يساوي $\sqrt{2}$ مضروبًا في طول ضلعه، وكانوا يستعملون 1.4142 كقيمة للعدد $\sqrt{2}$. كانوا يعتبرون أن العدد 1.4142 قريب من $\sqrt{2}$ بما يكفي حاجاتهم الحسابية.



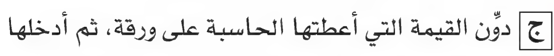
أ) استعمل الحاسبة لتجد قيمة $\sqrt{2}$.



ب) هل القيمة التي حصلت عليها تساوي 1.4142؟



ج) دوِّن القيمة التي أعطتها الحاسبة على ورقة، ثم أدخلها في الحاسبة من جديد واحسب تربيعها. هل تحصل على 2؟ اشرح.



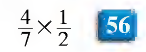


**تطبيقات** **55** تدفع إحدى المؤسسات عن كل موظف مبلغ 2000 دينار شهريًّا لنظام التأمين الصحّي. يمثّل هذا المبلغ نصف المبلغ الذي يدفعه الموظف شهريًّا للغاية نفسها. ما قيمة المبلغ الذي يدفعه الموظّف سنويًّا لنظام التأمين الصحّي؟

## نظرة إلى الوراء

**احسب المقدار واكتب الإجابة على أبسط صورة.**

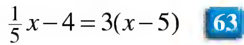
**56** $\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}$    **57** $\frac{6}{11}\times\frac{2}{3}$    **58** $21\div\frac{7}{8}$    **59** $10\div\frac{5}{6}$



**حُلَّ المعادلة.**

**60** $3(x-5)=4$    **61** $\frac{x}{3}+9=2$

**62** $3x-5=x+12$    **63** $\frac{1}{5}x-4=3(x-5)$



## نظرة إلى الأمام

**64** يشكّل حل المعادلات أفضل دليل على ضرورة استعمال مختلف أنواع الأعداد. فحلُّ المعادلة $x+7=5$ عدد سالب، رغم أنها لا تتضمَّن إلا أعدادًا موجبة. وحل المعادلة $2x=-5$ عدد نسبي رغم أن المعادلة لا تتضمَّن إلا أعدادًا صحيحة.

أ) أعطِ مثالاً جديدًا على معادلة لا تتضمَّن إلا أعدادًا غير سالبة ويكون حلّها عددًا سالبًا.

ب) أعطِ مثالاً على معادلة لا تتضمَّن إلا أعدادًا صحيحة ويكون حلّها عددًا غير صحيح.




# المعادلات Equations



**لماذا**

نستطيع حل الكثير من مسائل الحياة اليومية باستعمال المعادلات. المعادلة تشبه الميزان، والتعادل يفرض أن نتعامل بالتساوي مع كل كفّة (أو كل طرف في المعادلة).

**الأهداف**

- يتعرّف خواص المساواة ويستعملها.
- يكتب معادلات خطّية ويحلُّها جبريًّا وبيانيًّا.
- يحلّ معادلة متعدِّدة المتغيّرات حاسبًا إحداها بدلالة المتغيِّرات الأخرى

**المعادلة Equation** هي مساواة بين مقدارين يتضمّنان متغيّرًا أو أكثر يدعى **مجهولاً Unknown**.

$12x=10$ ، هي معادلة في مجهول واحد هو $x$ .

$2x-3y=12$ ، هي معادلة في مجهولين هما $x$ وَ $y$ .

كل عدد يحقِّق المعادلة بالتعويض (أي إنه يحوِّلها إلى مساواة صحيحة بعد إحلال العدد محلّ المجهول) يُدعى **جذرًا Root** لها. فالعدد $\frac{5}{6}$ مثلاً هو جذر للمعادلة $12x=10$ لأن التعويض عن المجهول بهذا العدد يؤدّي إلى مساواة صحيحة: $12\times\frac{5}{6}=10$ .

**حل معادلة** هو إيجاد مجموعة الأعداد التي تشكِّل جذورًا لها. هذه المجموعة تُدعى **مجموعة الحل Solution Set** للمعادلة. يمكن لهذه المجموعة أن تقتصر على عنصر واحد، كما يمكن أن تحتوي على أكثر من عنصر أو حتى على عدد غير منتهٍ من العناصر. ويمكن لمجموعة الحل أن تكون **المجموعة الخالية Empty Set** $\varnothing$ ، أي لا تحتوي على أي عنصر.

استعمل **خواص المساواة** بين الأعداد الحقيقية، و**خاصّية التعويض** عند قيامك بحل المعادلات.

## خواص المساواة Properties of Equality

| الخاصية | | |
|---|---|---|
| **خاصّية الانعكاس Reflexive Property** | $a=a$ | |
| **خاصّية التناظر Symmetric Property** | إذا كان $a=b$ | فإن $b=a$ |
| **خاصّية التعدّي Transitive Property** | إذا كان $a=b$ وَ $b=c$ | فإن $a=c$ |
| **خاصّية الجمع Addition Property** | إذا كان $a=b$ | فإن $a+c=b+c$ |
| **خاصّية الطرح Substraction Property** | إذا كان $a=b$ | فإن $a-c=b-c$ |
| **خاصّية الضرب Multiplication Property** | إذا كان $a=b$ | فإن $ac=bc$ |
| **خاصّية القسمة Division Property** | إذا كان $a=b$ | فإن $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ حيث $c\neq0$ |
| **خاصّية التعويض Substitution Property** | إذا كان $a=b$ | فإن التعويض عن $a$ بِـ $b$ في أي جملة رياضية صحيحة، يبقيها صحيحة. |

يبدأ حل المعادلات دائمًا بتبسيط المقادير وحذف رموز التجميع.

## مثال 1

**تطبيقات**
**درجات الحرارة**

هناك مقياسان لدرجات الحرارة: المقياس المئوي (Celsius) ومقياس فهرنهايت (Fehrenheit).
العلاقة بين المقياسين هي $F = \frac{9}{5}C + 32$ حيث يرمز $F$ إلى درجة الحرارة بمقياس فهرنهايت، ويرمز $C$ إلى درجة الحرارة بالمقياس المئوي.

جاء في نشرة الأحوال الجوية أن درجة الحرارة اليوم كانت 86 درجة على مقياس فهرنهايت.
**كم كانت درجة الحرارة على المقياس المئوي؟**

**الحل**

| | |
|---|---|
| $F = \frac{9}{5}C + 32$ | القاعدة |
| $86 = \frac{9}{5}c + 32$ | عوّض عن $F$ بالعدد 86 |
| $86 - 32 = \frac{9}{5}C + 32 - 32$ | اطرح 32 من كل طرف مستعملاً خاصّية الطرح |
| $54 = \frac{9}{5}C$ | بسّط |
| $\left(\frac{5}{9}\right)54 = \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{9}{5}C\right)$ | اضرب كل طرف في $\frac{5}{9}$ مستعملاً خاصّية الضرب |
| $30 = C$ | بسّط |
| $C = 30$ | استعمل خاصّية التناظر |

## مثال 2

حُلَّ المعادلة $2x+7=5x-9$ .

**الحل**

| | |
|---|---|
| $2x+7=5x-9$ | المعادلة |
| $2x+7-7=5x-9-7$ | اطرح 7 من كل طرف مستعملاً خاصّية الطرح |
| $2x=5x-16$ | بسّط |
| $2x-5x=5x-16-5x$ | اطرح $5x$ من كل طرف مستعملاً خاصّية الطرح |
| $-3x=-16$ | بسّط |
| $\frac{-3x}{-3}=\frac{-16}{-3}$ | اقسم كل طرف على $-3$ مستعملاً خاصّية القسمة |
| $x=\frac{16}{3}$ | بسّط |

**تحقّق:** $2\times\frac{16}{3}+7\overset{?}{=}5\times\frac{16}{3}-9$

$\frac{32+21}{3}\overset{?}{=}\frac{80-27}{3}$

$\frac{53}{3}\overset{?}{=}\frac{53}{3}$ صواب

إذًا $x=\frac{16}{3}$ هو جذر المعادلة.

**حاول** حُلَّ المعادلة $3x+12=-5x+24$ ، وتحقّق من الحل بالتعويض.

## النشاط

### استكشاف حل المعادلات بيانيًا Exploring Graphic Solution Method

1. ما المقداران المتساويان اللذان تتكوَّن منهما المعادلة التالية: $x+3=9-2x$؟
2. ارسم، في المستوى الإحداثي نفسه، المستقيمين: $y=x+3$ وَ $y=9-2x$؟
3. ما قيمة الإحداثي الأول لنقطة تقاطع المستقيمين؟
4. تحقَّق بالتعويض إن كانت هذه القيمة تشكِّل حلاً للمعادلة.
5. اشرح كيف تحلّ المعادلة $2x-1=2-x$ بيانيًّا.




### مثـــــال 3

حُلَّ بيانيًا المعادلة $3.24x-4.09=-0.72x+3.65$.




**الحـــل**

ارسم المستقيم $y=3.24x-4.09$ والمستقيم $y=-0.72x+3.65$ باستعمال حاسبة بيانية أو ورقة بيانية، وحدّد نقطة تقاطعهما. الإحداثي الأول لنقطة التقاطع هو عدد قريب جدًّا من 3، ربما 3.07. الحل هو 3.07 تقريبًا.

**حـــاولْ** حُلَّ بيانيًّا المعادلة $2.24x-6.24=4.26x-8.76$.

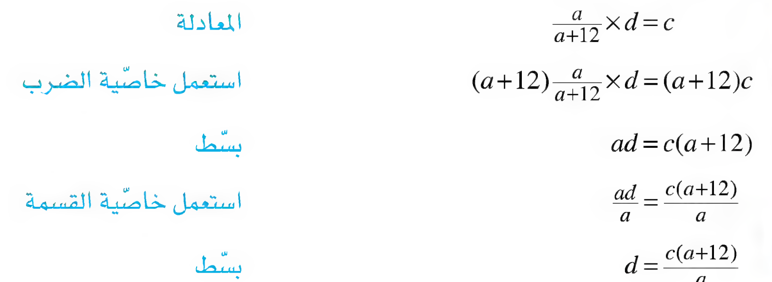
## المعادلات الحرْفية Literal Equations

**المعادلة الحرْفية Literal equation** هي معادلة تتضمَّن متغيِّرين أو أكثر. من هذه المعادلات قوانين حساب المساحات والحجوم.

### مثـــــال 4

يستعمل الأطبّاء قانونًا يحدِّد كميّة الدواء التي تُعطى للأطفال نسبة إلى تلك التي تُعطى للبالغين. هذا القانون هو $\frac{a}{a+12}\times d=c$ حيث يمثِّل المتغيِّر $c$ الكمّية التي تُعطى للطفل، والمتغيِّر $a$ عمر الطفل، والمتغيِّر $d$ الكمّية التي تُعطى للبالغ. حُلَّ المعادلة بالنسبة إلى المتغيِّر $d$، أي احسب هذا المتغيِّر بدلالة المتغيِّراتْ الأخرى.



$\frac{a}{a+12}\times d=c$ — المعادلة

$(a+12)\frac{a}{a+12}\times d=(a+12)c$ — استعمل خاصّية الضرب

$ad=c(a+12)$ — بسّط

$\frac{ad}{a}=\frac{c(a+12)}{a}$ — استعمل خاصّية القسمة

$d=\frac{c(a+12)}{a}$ — بسّط



**تفكير ناقد** حُلَّ معادلة المثال 4 بالنسبة إلى المتغيِّر $a$.

**نقطة مراقبة √** نعتبر أن معادلتين **متكافئتان Equivalent** إذا كانت لهما الحلول نفسها. استعمل التعويض للتحقُّق من أن المعادلتين $86=\frac{9}{5}x+32$ وَ $54=\frac{9}{5}x$ ، متكافئتان.

# التمــــــاريــــــن

## التواصل في الرياضيات

**اذكر الخواصّ التي تستعملها في حل المعادلة.**

**1** $52=-2.7x-3$

**2** $x+2.2=\frac{x}{5}$

**3** $3x-5=2x-2$

**4** اشرح كيف تحصل على معادلة مكافئة للمعادلة $4x-7=4$ .

**5** اشرح كيف تحلّ بيانيًّا المعادلة $\frac{2(x+3)}{7}=\frac{9(x-3)}{7}$ .



## تمارين موجَّهة

**حُلَّ المعادلة وتحقَّق من الحل.**

**6** $4x+12=20$

**7** $\frac{x}{5}+3=4$

**8** $-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=2-3x$

**9** $7-6x=2x-9$

**10** حُلَّ المعادلة $Ax+By=C;\ B\neq 0$ ، لحساب المجهول $y$ بدلالة المجاهيل الأخرى.

## تمارين وتطبيقات

**حُلَّ المعادلة.**

**11** $2x-5=1$

**12** $-2x-7=9$

**13** $5x-3=12$

**14** $20=6x-10$

**15** $4-5x=19$

**16** $3x+1=\frac{1}{2}$

**17** $4x+80=-6x$

**18** $7x=-2x+5$

**19** $5x+3=2x+18$

**20** $4x-3=x+7$

**21** $\frac{1}{5}x+3=2$

**22** $\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}=-2$

**23** $\frac{1}{2}x+2=0$

**24** $\frac{1}{3}x=-x+4$

**25** $x-5=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

**26** $-\frac{1}{3}x+1=\frac{3}{2}x-1$

**27** $\frac{2}{3}x+9=\frac{1}{2}x-4$

**28** $\frac{1}{4}x-3=6x$

**29** $\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}x-1$

**30** $\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}=x-3$

**حُلَّ المعادلة باستعمال الحاسبة، واكتب الحلّ مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة.**

**31** $0.24x+1.1=2.56x-1.5$

**32** $1.05x-4.28=-2.65x+4.1$

**33** $0.67x-8.75=-0.48x+3.99$

**34** $5.9(0.33x-1.33)=1.03x-5.72$

**حُلَّ المعادلة بحساب المجهول المذكور بين قوسين بدلالة المجاهيل الأخرى.**

**35** $\frac{1}{2}bh=A$ $(b)$

**36** $P=2l+2w$ $(w)$

**37** $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ $(r_2)$

**38** $A=\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$ $(b_2)$

**39** $A=\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$ $(h)$

**40** $Y=\frac{u+1}{u+2}$ $(u)$

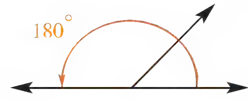
**41** $ax+b=cx+d$ $(x)$

**42** $ax+b=cx+d$ $(d)$

**43** لديك $y=4x+7$ . استعمل التعويض لكي تحلّ المعادلة $-2x+y=19$ .

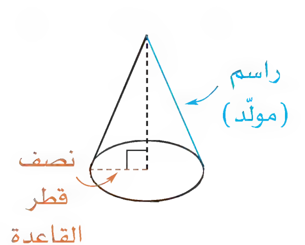
**ربط**

**44** **هندسة** يبلغ قياس إحدى زاويتين متكاملتين ضعف قياس الزاوية الأخرى مضافًا إليه 45 درجة. اكتب معادلة واستعملها لتجد قياس الزاويتين.




**تحدٍّ**

**45** **هندسة** يسمح القانون $A=\pi rs+\pi r^2$ بحساب مساحة المخروط، حيث يرمز $A$ إلى مساحة المخروط، وَ $r$ إلى نصف قطر دائرة القاعدة، وَ $s$ إلى طول راسم (مولّد) المخروط. اكتب القانون الذي يسمح بحساب راسم (مولّد) المخروط بدلالة المساحة $A$ ونصف القطر $r$.





## نظرة إلى الوراء

**احسب المقدار مستعملاً ترايب العمليات.**

**46** $3(2-(5-3)-7)+2$

**47** $-(-5^2)^3$

## نظرة إلى الأمام

**اشرح ما تعنيه الجملة الرياضية.**

**48** $y>-5$

**49** $-3<x<3$

**50** $-1\leq y\leq 1$

**51** $x\geq -3$




# المُتبايِنـــات Inequalities

**لماذا**

نستطيع حل الكثير من مسائل الحياة اليومية باستعمال المتباينات. مثال على ذلك، نسبة الدهون التي يجب ألاّ يتجاوزها الإنسان في طعامه لئلا يصاب بالصداع.



**الأهداف**

- يكتب مُتبايِنة خطِّية بمجهول واحد، ويحلُّها جبريًّا وبيانيًّا.
- يحل مُتباينات خطّية مركَّبة بمجهول واحد، جبريًّا وبيانيًّا.

**تطبيقات**
**تغذية**

أظهرت إحدى الدراسات أن الأشخاص الذين يخفِّفون كمّية الدهون في طعامهم لِتقلَّ عن 20% من قيمة السعرات الحرارية التي يتناولونها، يصبحون أقلَّ عرضة لصداع الرأس. إذا رمز $c$ إلى عدد السعرات الحرارية في طعام الفرد، فيجب ألاّ يزيد عدد السعرات الدهنية $F$ على 20% من $c$.
نُعبِّر عن ذلك بالجملة الرياضية $F \leq 0.2c$ .

مثل هذه الجملة تُسمّى **مُتباينة Inequality**. بصورة عامة، كل جملة رياضية تتضمَّن أحد رموز التباين ($\leq$ ;$\geq$ ;$>$ ;$<$) هي مُتبايِنة.

بغية حل المُتبايِنات، استعمل خواص التبايُن بين الأعداد الحقيقية.

## خواص التبايُن Properties of inequality

| | |
|---|---|
| **خاصّية الجمع Addition Property** | إذا كان $a \leq b$ ، فإن $a+c \leq b+c$ |
| **خاصّية الطرح Substraction Property** | إذا كان $a \leq b$ ، فإن $a-c \leq b-c$ |
| **خاصّية الضرب Multiplications Property** | إذا كان $a \leq b$ ، فإن $ac \leq bc$ إذا كان $c>0$<br>$ac \geq bc$ إذا كان $c<0$ |
| **خاصّية القسمة Division Property** | إذا كان $a \leq b$ ، فإن $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ إذا كان $c>0$<br>$\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ إذا كان $c<0$ |

تبقى الخواص السابقة صحيحة باستخدام رموز التباين الأخرى.

**مجموعة الحل Solution Set** للمُتبايِنة هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل المُتبايِنة صحيحة بالتعويض.

فالعددان الحقيقيان $\frac{1}{2}$ وَ $-1$ هما، مثلاً، حلاّن للمتباينة $6x+1<13$، لأن التعويض عن المجهول $x$ بأحد هذين العددين يعطيك مُتباينتَيْن عدديتَيْن صحيحتَيْن:

$$6x+1<13 \qquad\qquad 6x+1<13$$
$$6\left(\frac{1}{2}\right)+1\overset{?}{<}13 \qquad\qquad 6(-1)+1\overset{?}{<}13$$
$$3+1\overset{?}{<}13 \qquad\qquad -6+1\overset{?}{<}13$$

$4\overset{?}{<}13$ صواب — $-5\overset{?}{<}13$ صواب

**نقطة مراقبة √** هل تستطيع أن تجد حلولاً أخرى للمُتباينة السابقة؟ تحقَّق باستعمال التعويض.

## مثـــــــال 1

حُلّ المتباينة $4x-5\geq 13$ .

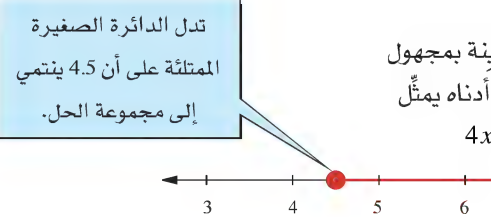
**الحــل**

| | |
|---|---|
| $4x-5\geq 13$ | المتباينة |
| $4x-5+5\geq 13+5$ | استعمل خاصّية الجمع |
| $4x\geq 18$ | بسّط |
| $x\geq \frac{18}{4}=4.5$ | استعمل خاصّية القسمة |

مجموعة الحل للمُتباينة السابقة هي، إذًا، مجموعة الأعداد الحقيقية التي لا تقلّ عن 4.5.

**حـــاول** حُلّ المُتباينة $-4<7-3x$ .

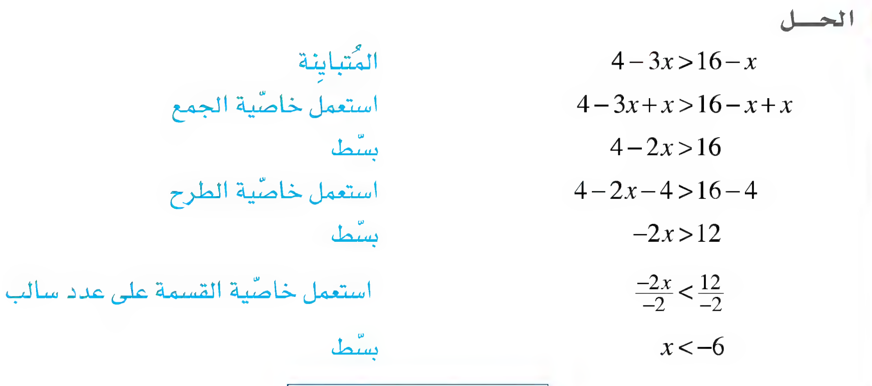
يمكنك تمثيل مجموعة الحل للمُتباينة بمجهول واحد على محور الأعداد. فالشكل أدناه يمثِّل مجموعة الحل للمُتباينة $4x-5\geq 13$



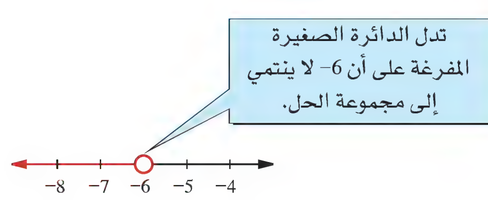

## مثـــــــال 2

حُلّ المُتباينة $4-3x>16-x$ ، ومثّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**الحــل**



| | |
|---|---|
| $4-3x>16-x$ | المُتباينة |
| $4-3x+x>16-x+x$ | استعمل خاصّية الجمع |
| $4-2x>16$ | بسّط |
| $4-2x-4>16-4$ | استعمل خاصّية الطرح |
| $-2x>12$ | بسّط |
| $\frac{-2x}{-2}<\frac{12}{-2}$ | استعمل خاصّية القسمة على عدد سالب |
| $x<-6$ | بسّط |




**حـــاول** حُلّ المُتباينة $5-7b>8-4b$ .

**مثـــــال 3**

**تطبيــــقات امتحانات**

تتحدّد درجة التلميذ النهائية في ثانوية قنديل من درجة الاختبار بنسبة الثلثين ودرجة الواجب المنزلي بنسبة الثلث. كانت درجة صباح في اختبار التاريخ 90 على 100. **ما الحد الأدنى لدرجة الواجب المنزلي التي يجب أن تنالها صباح لكي لا تقلّ درجتها النهائية عن 93 على 100؟**

**الحـــل**

تسمح لك معطيات المسألة أن تكتب:

$$\frac{1}{3}\left(\text{درجة الواجب المنزلي}\right) + \frac{2}{3}\left(\text{درجة الاختبار}\right) = \text{الدرجة النهائية}$$

أو $f = \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ حيث يرمز $f$ إلى الدرجة النهائية، ويرمز $h$ إلى درجة الواجب المنزلي.

لكي لا تقلّ $f$ عن 93 يجب أن تشكّل $h$ حلاًّ للمُتبايِنة:

$93 \le \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ .

حُلّ هذه المتباينة:

| | |
|---|---|
| $93 \le \frac{1}{3}h + 60$ | بسّط |
| $93 - 60 \le \frac{1}{3}h + 60 - 60$ | استعمل خاصّية الطرح |
| $33 \le \frac{1}{3}h$ | بسّط |
| $3 \times 33 \le 3 \times \frac{1}{3}h$ | استعمل خاصّية الضرب |
| $99 \le h$ | بسّط |

إذًا، يجب ألاّ تقل درجة الواجب المنزلي عن 99، لكي لا تقلّ الدرجة النهائية عن 93.

## النشاط

### استكشاف حل المُتبايِنات بيانيًّا Exploring Inequalities Grayphically

1. حُلَّ المُتبايِنة $2x - 3 < 3$ .
2. ارسم، في المستوى الإحداثي نفسه، المستقيمين $y = 2x - 3$ وَ $y = 3$ .
3. حدِّد قيَم المتغيِّر $x$ التي تجعل النقطة العائدة لها على المستقيم $y = 3$ أعلى من تلك التي على المستقيم $y = 2x - 3$ .
4. اشرح كيف تساعدك الإجابة عن السؤال السابق على حل المُتبايِنة.
5. حُلَّ المُتبايِنة $3x + 2 > 5$ بيانيًّا. اشرح الخطوات التي تقودك إلى الحل.

**نقطة مراقبة √**

**تفكير ناقد**

هل تصلح الطريقة السابقة لحل المُتبايِنة $2x - 3 > x + 4$ ؟ والمُتبايِنة $3x + 1 \ge 4$ ؟ أوضح ذلك.

## المتباينات المركّبة Compound Inequalities

قرأ دانا نتائج فحص الدم الذي أجراه لمعرفة كمّية السكّر في دمه، ووجد عليها إشارة تقول إن هذه الكمية $s$ يجب ألاّ تقلّ عن 750 ملّيغرامًا في اللتر، وألاّ تزيد على 1100 ملّيغرام في اللتر.

إذًا، يجب أن تحقّق $s$ الشرطين $s \ge 750$ وَ $s \le 1100$ ، أي أن تكون حلاًّ مشتركًا للمُتبايِنتين $x \ge 750$ وَ $x \le 1100$ .

عندما ترتبط مُتباينتان بواسطة الرابط «وَ» $\wedge$ نحصل على **مُتباينة مُركَّبة Compound Inequality**. لكي تحلّ مُتباينة مُركَّبة بواسطة الرابط $\wedge$ ، ابدأ بحلّ كلّ من المُتباينتَين على حدة، وخذ الحلول المشتركة. أي إنَّ مجموعة الحل لمُتباينة مركَّبة بواسطة الرابط $\wedge$ هي تقاطع مجموعتي الحل للمُتباينتين، كلٌّ على حدة.

**مثـــــال 4** حُلّ $(3x-4\le 17)\wedge(2x+1\ge 3)$ ومثّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

الحــل

| | | |
|---|---|---|
| $3x-4\le 17$ | $\wedge$ | $2x+1\ge 3$ |
| $3x\le 21$ | $\wedge$ | $2x\ge 2$ |
| $x\le 7$ | $\wedge$ | $x\ge 1$ |

مجموعة الحل لهذه المتباينة المُركَّبة هي مجموعة قيَم $x$ التي تحقِّق $1\le x\le 7$

وهي تمثَّل على محور الأعداد كما يلي:



بصورة عامة، يمكنك التعبير عن $(x<b)\wedge(x>a)$ على الشكل التالي: $a<x<b$.

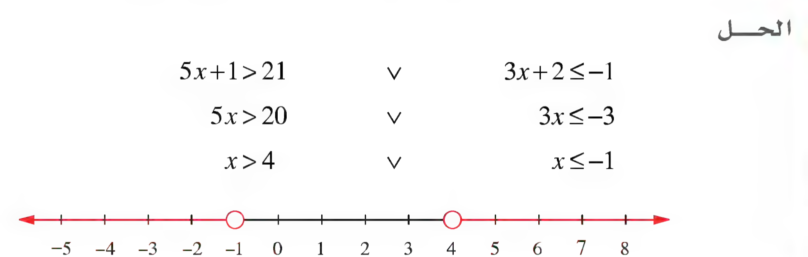
**حـــاولْ** حُلّ $(x-5>-12)\wedge(-2x+5\ge 3)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

هناك نوع آخر من المُتباينات المركَّبة، هي تلك التي تنتج عن ربط مُتباينتين باستعمال الرابط «أو» $\vee$. مجموعة الحل لمُتباينة مركَّبة بواسطة الرابط $\vee$ هي اتحاد مجموعتَي الحل للمُتباينتَين، كلٌّ على حدة.

**مثـــــال 5** حُلّ $(3x+2\le -1)\vee(5x+1>21)$ ومثّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

الحــل

| | | |
|---|---|---|
| $3x+2\le -1$ | $\vee$ | $5x+1>21$ |
| $3x\le -3$ | $\vee$ | $5x>20$ |
| $x\le -1$ | $\vee$ | $x>4$ |




**حـــاولْ** حلّ $(7x+1>36)\vee(2x\le 5)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

## التمـــــاريـــن

### التواصل في الرياضيات

**1** أوضح الخطوات التي تقوم بها لتمثيل مجموعة الحل للمُتباينة $7x-7>0$ على محور الأعداد.

**2** بِمَ تختلف مجموعة حل $7x-7>0$ عن مجموعة حل $7x-7\geq 0$ ؟
بِمَ تختلف مجموعة حل $7x-7>0$ عن مجموعة حل $7x-7<0$ ؟

**3** هل المتباينتان $x<16$ وَ $-x<-16$ متكافئتان؟ اشرح.

**4** كيف تكتب الجملة «$x$ عدد غير سالب» باستعمال رموز التبايُن؟

## تمارين موجَّهة

**5** حُلّ المُتباينة $3x+1<13$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**6** حُلّ المُتباينة $a+4<4a-11$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**تطبيقات**

**7** **امتحانات** تتحدَّد درجة التلميذ النهائية في ثانوية كاده من درجة الاختبار بنسبة $\frac{3}{4}$ وَ درجة السعي اليومي بنسبة $\frac{1}{4}$. كانت درجة سولين في السعي اليومي 92 على 100. ما الحد الأدنى للدرجة التي على سولين أن تنالها في الاختبار لكي لا تقلّ درجتها النهائية عن 80 على 100؟

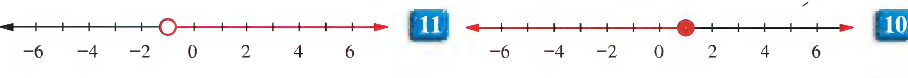
**8** حُلّ المُتباينة المُركَّبة $(2x+3<15)\wedge(3x-7\geq -13)$ ، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**9** حُلّ المُتباينة المُركَّبة $(4x-6<14)\vee(2x+4\leq -10)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

## تمارين وتطبيقات

**اكتب مُتباينة تناسب مجموعة الحلّ الممثَّلة على محور الأعداد.**

**10** **11**



**12** **13**



**حُلّ المُتباينة، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

**14** $5x<10$ **15** $-5x>10$

**16** $-5x<-10$ **17** $a+4<10$

**18** $\frac{1}{2}a-1\geq -15$ **19** $\frac{1}{5}b-2\leq 28$

**20** $-x+8<41$ **21** $-5x-15\leq 60$

**22** $\frac{y}{2}\leq 10$ **23** $-\frac{y}{32}<2$

**24** $-6(b+4)<12$ **25** $6-(4a-3)\geq 8$

**26** $4y-12>7y-15$ **27** $3(4y-5)<8y+3$

**28** $-4x-3<-6x-17$ **29** $-5(3x+2)\geq 4(x-1)$

**حُلّ المُتباينة المُركَّبة، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

**30** $(x>-4)\wedge(x<2)$ **31** $(x>-4)\wedge(x>2)$

**32** $(x>-4)\vee(x>2)$ **33** $(x>-4)\vee(x<2)$

**34** $(x<-4)\wedge(x>2)$ **35** $(x<-4)\wedge(x<2)$

**36** $(x<-4)\vee(x<2)$ **37** $(x<-4)\vee(x>2)$

**حُلّ المُتباينة المُركَّبة، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

**38** $(n+4<16)\wedge(n-3>12)$

**39** $(y-2<4)\wedge(y+4>7)$

**40** $(x+7>4)\vee(x-2<2)$

**41** $(x+8<5)\vee(x-1>3)$

**42** $(-9x\geq-81)\wedge(2(x+6)>-4)$

**43** $(-5y<40)\wedge(4(y-3)\leq-8)$

**حُلّ المُتباينة المُركَّبة، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

**44** $(20-3x\geq 11)\vee(-4x\leq-20)$

**45** $(14-3x\leq 2)\vee(5-4x\geq 17)$

**46** $(2x>7x-10)\vee(8x\leq 3x-15)$

**47** $(2x-7<5x+8)\vee\left(\frac{1}{2}(16-4x)\geq 0\right)$

تحــدٍّ

**48** حُلَّ المُتباينة $-2a\leq 3x+a<10$ حيث المجهول $x$ .

تطبيــــقات

**49** **أعمال خيرية** قرّرت إحدى المؤسسات الخيرية إجراء سحب خيري على سيارة تبرَّعت بها إحدى الشركات. تتوقَّع هذه المؤسسة بيع 250 1 تذكرة على الأقل، وتأمل الحصول على 000 000 210 دينار.

كم يكون السعر الأدنى للبطاقة، علمًا بأن نفقات الدعاية تبلغ 000 000 15 دينار؟




**50** كلفة الإنتاج لسلعة معيَّنة هي $C=40x+868$ ، ومردود البيع هو $R=54x$ ، حيث يرمز $x$ إلى عدد الوحدات المنتجة، ويرمز $C$ إلى كلفة إنتاج هذه الوحدات.

أ اكتب مُتباينة تعبِّر عن تحقيق أرباح.

ب كم وحدة على الأقل يجب على المؤسسة أن تبيع لئلاّ تقع تحت خسارة؟

ج حُلّ المُتباينة السابقة بيانيًّا.

## نظرة إلى الوراء

**حُلّ المعادلة الحرفية وذلك بحساب المجهول بين القوسين بدلالة المجاهيل الأخرى.**

**51** $A=p+prt$ $(t)$

**52** $SA=2ab+2ac+2bc$ $(a)$



## نظرة إلى الأمام

**53** اذكرْ عددَيْن يساوي مطلق كل منهما 4.




# القوى والجذور Powers and radicals

**الأهداف**

- يحسب قيمة مقدار يتضمن قوى.
- يبسّط مقادير تتضمَّن قوى باستعمال قوانين القوى.



**لماذا**
غالبًا ما نجد القوى في التطبيقات المختلفة كما هي الحال في الفيزياء. فقوة الجذب المركزي التي يتعرض لها الراكب على دولاب سريع في مدينة الألعاب يمكن التعبير عنها باستعمال القوى.

**تطبيقات**
**فيزياء**

من التسليات الأكثر شعبية في مدينة الألعاب، تلك التّي يركب فيها الشخص دولابًا يدور بسرعة كبيرة حول محور، ممّا يعرِّضه لقوة جذب مركزية. يمكن التعبير عن تلك القوة بالقاعدة التالية:

$$A = 4\pi^2 r T^{-2}$$

$A$ : تسارع قوة الجذب المركزية
$r$ : نصف قطر الدولاب
$T$ : الزمن اللازم لكي يكمل الدولاب دورته.

سبق لك أن تعاملت مع الرمز $a^n$ الذي يدعى **قوة العدد $a$ Power**. يمثِّل العدد $a$ في هذه الكتابة **الأساس Base** و يمثِّل $n$ **الأس Exponent** بحيث تُقرأ $a^n$ على الشكل التالي: $a$ أس $n$.

## قوة عدد حقيقي Power of a Real Number

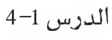
إذا كان $a$ عددًا حقيقيًّا فإن:

$a^n = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{n \text{ مرة}}$ عندما يكون $n$ عددًا صحيحًا موجبًا.

$a^n = 1$ عندما يكون $n = 0$ ، أي إن $a^0 = 1;\ a \neq 0$ .

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ عندما يكون $n$ عددًا صحيحًا موجبًا وَ $a \neq 0$ .

لا يمكن للعدد $a$ أن يساوي الصفر في المقدار $a^0$ لأن $0^0$ غير معرّف.
سوف يُبيّن لك المثال 1 كيف يُستعمل التعريف $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .



**مثـــــال 1**

بالعودة إلى مثال قوّة الجذب المركزيّة، احسب تسارع هذه القوّة على راكب يدور في دولاب نصف قطره 6 أمتار بسرعة دورة كلّ ثانيتين.

**الحـل**

احسبْ قيمة المقدار $T = a\pi^2 rT^{-2}$ حيث $r = 6$ وَ $T = 2$، تحصلْ على:

$T = 4\pi^2 rT^{-2} = 4\pi^2(6)(2)^{-2} = \frac{24\pi^2}{2^2} = \frac{24\pi^2}{4} = 6\pi^2 \approx 59.2$ .

**حـاولْ** احسب تسارع هذه القوة على راكب يدور دورة واحدة كل 5 ثوانٍ في دولاب نصف قطره 6 أمتار.

## النشاط

### استكشاف خصائص القوى Exploring Properties of Exponents

1. أعد كتابة $a^3 \times a^5$ على صورة قوة عن طريق تفكيك كل من القوتين وإعادة تجميع العوامل. ما العملية التي يُمكنك إجراؤها على الأسَّيْن للحصول على النتيجة نفسها؟
2. أعد كتابة المقدار $(a^3)^5$ على صورة قوة عن طريق تفكيك كل من القوتين وإعادة تجميع العوامل. ما العملية التي كان بإمكانك إجراؤها على الأسَّيْن للحصول على النتيجة نفسها؟
3. اشرح كيف تبسِّط المقدار $(a^3 \times a^7)^2$ لكتابته على صورة قوة من دون تفكيك القوى.

**نقطة مراقبة** √

يسمح لك النشاط السابق باستخلاص الخواص التالية للقوى حيث $a \neq 0$ وَ $b \neq 0$ :

**خواص القوى Properties Exponents**

| | | |
|---|---|---|
| ضرب القوى | Product of Powers | $a^m \times a^n = a^{m+n}$ |
| قسمة القوى | Quotient of Powers | $\frac{a^m}{b^n} = a^{m-n}$ |
| قوّة القوة | Power of a Power | $(a^m)^n = a^{mn}$ |
| قوى ناتج الضرب | Power of a Productict | $(ab)^n = a^n \times b^n$ |
| قوى ناتج القسمة | Power of a Quotient | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ |

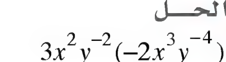
حيث $a \neq 0$ وَ $b \neq 0$ .

سوف نفترض في هذا الدرس أن جميع الأعداد المستعملة كأساس لقوة ذات أسٍّ سالب هي أعداد مختلفة عن الصفر.

**مثـــــال 2**

**بسِّط المقدار $3x^2y^{-2}(-2x^3y^{-4})$ . اكتب الناتج مستعملاً قوى ذات أس موجب.**

**الحـل**



| | |
|---|---|
| $3x^2y^{-2}(-2x^3y^{-4})$ | المقدار |
| $3(-2)x^2x^3y^{-2}y^{-4}$ | استعمل خاصية التبديل في الضرب |
| $-6x^{3+2}y^{-2+(-4)}$ | استعمل خاصية ضرب القوى |
| $-6\frac{x^5}{y^6}$ | بسِّط واستعمل $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ |

**حـاولْ** بسِّط المقدار $2z(3x^2)(5z^{-3})$ ، ثم اكتب الناتج مستعملاً قوى ذات أسٍّ موجب.

**حل المسائل** **ابحثْ عن نمط** أمعن النظر في ما يحدث لقوى عدد سالب:

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$
$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$
$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$
$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$$

لاحظ أن قوّة عدد سالب هي عدد موجب عندما يكون الأسّ زوجيًّا، وهي عدد سالب عندما يكون الأس فرديًّا.

يجب الانتباه إلى عدم الخلط بين أساس سالب وأسّ سالب:

| أسّ زوجيّ | أسّ فرديّ |
|---|---|
| $(-2x)^{-2}$ | $(-2x)^{-3}$ |
| $= \frac{1}{(-2x)^2}$ | $= \frac{1}{(-2x)^3}$ |
| $= \frac{1}{(-2)^2 x^2}$ | $= \frac{1}{(-2)^3 x^3}$ |
| $= \frac{1}{4x^2}$ | $= \frac{1}{-8x^3} = -\frac{1}{8x^3}$ |

**مثـــــال 3** بسِّط المقدار $\left(\frac{-y^7}{2x^{12}y^3}\right)^4$. اكتب الناتج مستعملاً قوى ذات أسّ موجب.

**الحـــل**

$$\left(\frac{-y^7}{2x^{12}y^3}\right)^4 = \frac{(-y^7)^4}{(2x^{12}y^3)^4}$$ استعمل خاصّية قوى ناتج القسمة

$$= \frac{y^{28}}{16x^{48}y^{12}}$$ استعمل خاصّية قوة القوة

$$= \frac{y^{28-12}}{16x^{48}}$$ استعمل خاصّية قسمة القوى

$$= \frac{y^{16}}{16x^{48}}$$ بسِّط

**حــــاولْ** بسِّط المقدار $\left(\frac{-3x^2y^5}{2y^2x^7}\right)^3$. واكتب الناتج مستعملاً قوى ذات أسّ موجب.

**تفكير ناقد** جد $a$، $b$، $c$ بحيث يكون $(x^{-2}y^3z^2)(y^a z^b x^c) = x^{-3}y^4$.

## الجذور Radicals

يمكنك أن تكتب القوى ذات الأُسّ النسبي على صورة أخرى تتضمّن الجذور، فالمقدار $a^{\frac{1}{3}}$ يساوي $\sqrt[3]{a}$، لأن $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$. هذه العلاقة تبقى صحيحة لجميع القوى ذات الأس النسبي إذ يمكنك كتابة المقدار $a^{\frac{2}{3}}$ على عدّة صور كما هو مبيَّن فيما يلي:

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$$

**القوى ذات الأسّ النسبي Powers With Rational Exponents**

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ حيث $n$ عدد صحيح موجب.

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ حيث $m$ و $n$ عددان صحيحان و $n$ موجب.

يوضّح المثال التالي كيف يُستعمل التعريف السابق.

**مثــــال 4** **احسب باستعمال الحاسبة قيمة كلّ من المقدارين $16^{\frac{1}{4}}$ و $27^{\frac{1}{2}}$ .**

الحـل



$$16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4\times\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

$$27^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} = 3^{3\times\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$$

تحقَّق من صحَّة إجابتك باستعمال الحاسبة.

**حـاولْ** احسبْ قيمة كلّ من المقدارين: $36^{\frac{3}{2}}$ و $64^{\frac{1}{3}}$ .

**تطبيقات طب**

يستعمل الأطباء قاعدة لتقدير المساحة الكليّة لإنسان اعتمادًا على طوله ووزنه، وذلك بغية حساب مقادير بعض الأدوية التي تُعطى له. هذه القاعدة هي $S = 0.007184 \times W^{0.425} \times H^{0.725}$ حيث يرمز $S$ إلى المساحة الكليّة بالأمتار المربَّعة، ويرمز $W$ إلى الوزن بالكيلوغرام، و $H$ إلى الطول بالسنتيمتر.

**مثــــال 5** **احسب المساحة الكلّية لإنسان وزنه 57.2kg وطوله 152.5cm. واكتب الجواب مقرَّبًا إلى أقرب عشر من المتر المربع.**

الحـل




$$S = 0.007184 \times W^{0.425} \times H^{0.725}$$
$$= 0.007184 \times (57.2)^{0.425} \times (152.5)^{0.725}$$
$$\approx 1.54$$

وهكذا فإن المساحة الكلّية لهذا الإنسان هي تقريبًا $1.5\text{m}^2$ .

**حـاولْ** احسب المساحة الكلّية لإنسان وزنه 62.3kg وطوله 180cm. واكتب الجواب مقرَّبًا إلى أقرب جزء من مئة من المتر المربَّع.

# التمــاريــن

## التواصل في الرياضيات

1. أوضح لماذا لا يتساوى المقداران $a^5 \times a^3$ و $(a^5)^3$ .
2. أوضح لماذا لا يتساوى المقداران $ab^3$ و $(ab)^3$ .
3. أوضح كيف تحسب $5^{-2}$ .
4. أوضح كيف تحسب $4^{\frac{3}{2}}$ باستعمال تعريف القوى ذات الأسّ النسبي.

## تمارين موجَّهة

**تطبيـــقات**

**5** **الفيزياء** احسب تسارع قوة الجذب المركزي لنموذج طائرة يدور بسرعة دورة كل ثانية ونصفٍ حول محور يبعد عنه 3m.

**بسِّط واكتب الجواب باستعمال الأسس الموجبة فقط.**

**6** $a^4 \times a^2$    **7** $\dfrac{x^9}{x^3}$

**8** $(y^3)^6$    **9** $(a^3b^7)^4$

**10** $(y^5y^{-2})^4$    **11** $\left(\dfrac{-2x^3y}{5x^7}\right)^2$

**12** $\left(\dfrac{a^3b^{-1}}{a^{-2}b^2}\right)^{-2}$    **13** $\left(\dfrac{1}{x^{-1}y^3z^0}\right)^{-1}$

**احسب المقدار.**

**14** $(100)^{\frac{1}{2}}$    **15** $(9)^{\frac{3}{2}}$    **16** $(27)^{\frac{1}{3}}$    **17** $(64)^{\frac{2}{3}}$

**18** **طب** احسب باستعمال الحاسبة مساحة شخص وزنه 53.64kg، وطوله 167.64cm، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

## تمارين وتطبيقات

**احسب.**

**19** $3^0$    **20** $9^0$    **21** $(5a)^0$    **22** $(2^52^3)^0$

**23** $6^{-1}$    **24** $4^{-2}$    **25** $\left(\frac{3}{5}\right)^4$    **26** $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

**27** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$    **28** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$    **29** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$    **30** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

**31** $(49)^{\frac{1}{2}}$    **32** $(27)^{\frac{2}{3}}$    **33** $(64)^{\frac{4}{3}}$    **34** $(25)^{\frac{3}{2}}$

**35** $(36)^{\frac{6}{4}}$    **36** $8^{\frac{2}{6}}$    **37** $-(64)^{\frac{2}{3}}$    **38** $(81)^{-\frac{3}{2}}$

**بسِّط المقدار واكتب الجواب مستعملاً الأسس الموجبة فقط.**

**39** $y^5y^2$    **40** $-2b^3b^5$    **41** $\dfrac{m^9}{m^5}$    **42** $\dfrac{bb^4}{b^2}$

**43** $\dfrac{x^2y^{-5}}{x^4}$    **44** $\dfrac{x^5m^2}{xm^{-4}}$    **45** $\left(\dfrac{-2y^2}{x^3}\right)^7$    **46** $\left(\dfrac{2b^4}{d^2}\right)^3$

**47** $\left(\dfrac{3x^4}{y^{-2}}\right)^5$    **48** $\left(\dfrac{15xy^3}{3y^2}\right)^{-1}$

**49** $\left(\dfrac{3x^4}{y^{-2}}\right)^5$    **50** $\left(\dfrac{-7y^{-2}}{x^5}\right)^6$

**51** $-2y^3(5xy^4)$    **52** $(6x^5)(3x^5)(x^0)$

53 $(-5m^4m^5)^2$

54 $(-3x^2y^7)^3$

55 $\left(\frac{-2b^5y^{-1}}{m^3}\right)^3$

56 $\left(\frac{3b^2y^3}{b^{-1}}\right)^5$

57 $\left(\frac{5b^2x^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-1}$

58 $\left(\frac{x^{-2}y}{b^{-1}}\right)^{-5}$

59 $\left(\frac{4b^2y^{-3}}{b^{-1}y^2}\right)^2$

60 $\left(\frac{15b^2x^{-2}}{-3bx^{-3}}\right)^{-2}$

61 $(2x^4y)^3$

62 $(3xb^{12})^3$

63 $(x^{-3}y^{-1})(x^{-3}y^0)^2$

64 $(x^{-3}y^2)(-2x^3y^7)^{-3}$

65 $(x^{-3}y^0)^2\left[\frac{(x^3y^5)^2}{x^5y^2}\right]^{-1}$

**استعمل الحاسبة لتحسب قيمة المقدار.**

66 $12^{6.05}+8.8^{3.24}$

67 $3.3^{2.7}-5^{1.9}+0.63^{0.95}$

68 $0.005^{21.53}+9.05^{0.034}$

69 $71.33^{0.44}+478.2^{0.4}$

70 $11.7^6+29.3^{1.23}-6^{-2.2}$

71 $89^{3.5}-5.25^{9.25}+324^{0.05}$

**تحـــد**

72 بيِّن أن $y^{a-b}=\frac{1}{y^{b-a}}$ حيث $y\neq 0$ .

73 بيِّن أن $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x-y}=-\frac{1}{xy}$ .

**ربـــط**

74 **هندسة** تعطي القاعدة $h=\frac{3}{\pi}Vr^{-2}$ ، ارتفاع المخروط $h$ بدلالة حجمه $V$ ونصف قطر قاعدته $r$ .

أ احسب ارتفاع مخروط حجمه $200\text{cm}^3$ ونصف قطر قاعدته 4cm. اكتب الجواب مقرَّبًا إلى أقرب عُشر.

ب اكتب القاعدة السابقة باستعمال قوى ذات أسّ موجب فقط.

**تطبيـــقات**

75 **هندسة البناء** تعطي المعادلة: $F=5\times10^{-3}r^4l^{-2}$ الحمولة القصوى بالأطنان لعمود بناء، حيث يرمز $F$ إلى الحمولة القصوى بالأطنان، ويرمز $l$ إلى ارتفاع العمود بالأمتار، ويرمز $r$ إلى نصف قطر قاعدة العمود بالسنتيمترات.

أ احسب الحمولة القصوى لعمود ارتفاعه متران وقطره 50cm.

ب اكتب القاعدة السابقة باستعمال قوى ذات أسّ موجب.

**كيمياء** تتضاءل إشعاعات البلوتونيوم (Plotonium) ببطء شديد. يتم تحديد النسبة المئوية للبلوتونيوم $(A)$ المتبقي بعد $x$ سنة، باستعمال القاعدة التالية: $A=100\times\left(0.5^{\frac{x}{24360}}\right)$ . حدِّد النسبة المئوية للبلوتونيوم المتبقّي بعد:

76 100 سنة

77 500 سنة

78 1000 سنة

79 5 000 سنة

**فيزياء** يتناقص الضغط الجوي كلما ارتفعنا عن سطح البحر. يمكن تحديد هذا الضغط باستعمال القاعدة التالية: $P = 14.7(10)^{-0.000064a}$ حيث يرمز $a$ إلى الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار ويرمز $p$ إلى الضغط الجوي بالمليمتر زئبق.

**80** كم يبلغ الضغط الجوي في مدينة ترتفع 1610 أمتار عن سطح البحر؟

**81** كم يبلغ الضغط الجوي في جبل إيفرست الذي يبلغ ارتفاعه عن سطح البحر 8848 مترًا؟

## نظرة إلى الوراء

**حُلَّ المُتباينة المركَّبة ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

**82** $(x > -3) \wedge (x < 1)$

**83** $\left(x > -\frac{1}{4}\right) \wedge \left(x > \frac{1}{2}\right)$

**84** $(x > -3) \vee (x < 1)$

**85** $\left(x > -\frac{1}{4}\right) \vee \left(x > \frac{1}{2}\right)$

**احسب المقدار باستعمال تراتب العمليات.**

**86** $2(3-1) + 6 \div 3 \div 2$

**87** $3(9-12) - 2(7-3) - 1$

**88** $3 \times 5^2 - 4(5-8)^2 \div 3$

**89** $(5-3)^{\frac{10-8}{13-12}}$



## نظرة إلى الأمام

**90** **سلالات** يشكِّل أبوك وأمّك الجيل الأول من أسلافك، ويشكِّل جدك وجدتك الجيل الثاني. أما الجيل الثالث فيتضمن 4 جدود وَ 4 جدات وهلمّ جرًّا. اكتب قاعدة تسمح لك باحتساب عدد أسلافك من الجيل $n$ . استعمل القوى في كتابة هذه القاعدة.





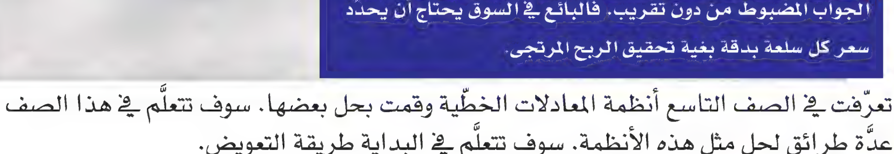

# حل الأنظمة الخطيَّة بالتعويض

## Solving Linear Systems by Substitution

**الأهداف**

- يحلّ نظامًا من معادلتين خطيَّتَيْن بطريقة التعويض.





**لماذا**

غالبًا ما تحتاج أن تحلّ نظامًا من معادلتَيْن خطيّتَيْن وتعطي الجواب المضبوط من دون تقريب. فالبائع في السوق يحتاج أن يحدّد سعر كل سلعة بدقة بغية تحقيق الربح المرتجى.

تعرّفت في الصف التاسع أنظمة المعادلات الخطّية وقمت بحل بعضها. سوف تتعلَّم في هذا الصف عدَّة طرائق لحل مثل هذه الأنظمة. سوف تتعلَّم في البداية طريقة التعويض.

## النشاط

### استكشاف طريقة التعويض Exploring Substitution

**تطبيقات**
سباق سيارات

شكّل سباق السيّارات الذي يجري في مدينة سبرنغ في الولايات المتحدة الأمريكية أحد أهمّ سباقات السيّارات. يقود كل سيّارة في هذا السباق فريق مؤلَّف من سائقَيْن يُتِمّ كل منهما عددًا من الدورات. حقَّق فريق آزاد ونوزاد 157 دورة بسيارته، وقد أتم نوزاد 21 دورة أقلّ من آزاد. كم دورة أتمَّ كلّ منهما؟

1. ابدأ بكتابة معادلات بغية إيجاد نموذج رياضي لحلّ المسألة. اختر المجهول $x$ لتمثيل عدد الدورات التي أتمَّها آزاد، والمجهول $y$ لتمثيل عدد الدورات التي أتمَّها نوزاد. سوف تحصل على نظام من معادلتَيْن خطّيتين بالمجهولَيْن $x$ و $y$:
$$\begin{cases} x+y=157 \\ y=x-21 \end{cases}$$

**حل المسائل**

2. استعمل طريقة **خمّن وتحقَّق** لتجد قيمتَي $x$ وَ $y$ اللتين تشكّلان حلاًّ لنظام المعادلتين.
3. انظر إلى المعادلة الثانية: $y=x-21$ . كيف يمكنك استعمال هذه المعلومة حول $y$ في المعادلة الأولى؟
4. $y=x-21$ ، عوّض إذن عن المجهول $y$ في المعادلة الأولى بقيمته $x-21$ ، ثم حُلَّ المعادلة التي حصلت عليها لتجد قيمة $x$.
5. عوّضْ عن المجهول $x$ في المعادلة الثانية بالقيمة التي وجدتها في السؤال السابق لحساب قيمة $y$.

**نقطة مراقبة** √

6. قارن قيمتَي $x$ وَ $y$ اللتَيْن وجدتهما مع القيمتَيْن اللتَيْن وجدتهما بطريقة **خمّن وتحقَّق**. هل تتطابق هذه النتائج؟ أوضحْ ذلك.

إذا علمت قيمة أحد المجهولَيْن في نظام معادلتَيْن خطيّتَيْن، فإن بإمكانك أن تحلّ النظام بأن تعوّض عن هذا المجهول بقيمته في إحدى المعادلتَيْن. هذه الطريقة لحل النظام تُدعى **طريقة التعويض** **Substitution method**.

**مثال 1** حُلّ النظام $\begin{cases} 8x+2y=19 \\ x=3 \end{cases}$ **بطريقة التعويض.**

**الحل**

بما أن $y=3$ ، فيمكنك التعويض عن $y$ في المعادلة الأولى بهذه القيمة:

$$8(3)+2y=19$$

حُلَّ الآن المعادلة التي حصلت عليها لتجد قيمة المجهول $y$.

$$24+2y=19$$
$$2y=-5$$
$$x=-2.5$$

الزوج المُرتَّب $(3, -2.5)$ هو حلّ النظام.

تحقَّق من صحَّة ذلك بالتعويض عن $x$ وَ $y$ في المعادلة الأولى:

$$8(3)+2(-2.5)\stackrel{?}{=}19$$
$$24+(-5)\stackrel{?}{=}19$$
$$19=19 \quad \text{صواب}$$

**مثال 2** حُلّ النظام $\begin{cases} 15x-5y=30 \\ y=2x+3 \end{cases}$ **بطريقة التعويض.**

**الحل**

عوّض عن $x$ بقيمته $2x+3$ في المعادلة الأولى ثم حل المعادلة الناتجة.

$$15x-5(2x+3)=30$$
$$15x-10x-15=30$$
$$5x-15=30$$
$$5x=45$$
$$x=9$$

عوّض عن $x$ بالقيمة 9 في المعادلة الثانية ثم حُلّ المعادلة الناتجة.

$$y=2(9)+3$$
$$=18+3$$
$$=21$$

الحل هو الزوج المُرتَّب $(9, 21)$ .

تحقَّق من صحّة ذلك بالتعويض عن $x$ وَ $y$ في المعادلتَيْن الأساسيّتَيْن.

$$15(9)-5(21)\stackrel{?}{=}30 \qquad 21\stackrel{?}{=}2(9)+3$$
$$135-105\stackrel{?}{=}30 \qquad 21\stackrel{?}{=}18+3$$
$$30=30 \ \text{صواب} \qquad 21=21 \ \text{صواب}$$

**حاولْ** حُلَّ النظام بطريقة التعويض.

أ $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ y=5 \end{cases}$

ب $\begin{cases} -3x+2y=31 \\ x=0.5y+6 \end{cases}$

## مثال 3

حُلَّ النظام $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 5x-7y=11 \end{cases}$ بطريقة التعويض.

**الحل**

بغية استعمال طريقة التعويض، حُلَّ المعادلة الأولى لحساب قيمة $y$ بدلالة $x$.

$3x+y=4$ (اختر المعادلة الأسهل للحل)

$3x+y-3x=4-3x$

$y=4-3x$

عوّض عن $y$ في المعادلة الثانية بقيمته $4-3x$ ثم حل المعادلة الناتجة.

$5x-7y=11$

$5x-7(4-3x)=11$

$5x-28+21x=11$

$26x-28=11$

$26x=39$

$x=1.5$

عوّض عن $x$ بالقيمة 1.5 في المعادلة الأولى ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$3(1.5)+y=4$

$4.5+y=4$

$y=-0.5$

الحل هو الزوج المرتّب $(1.5, -0.5)$ .

تحقّق من صحة ذلك بالتعويض عن $x$ وَ $y$ في المعادلتَيْن الأساسيّتَيْن.

**تفكير ناقد** لماذا قمت، في المثال 3، بحساب المجهول $y$ بدلالة $x$ مستعملاً المعادلة الأولى عوضًا عن حساب $x$ بدلالة $y$؟

**حاولْ** حُلّ النظام $\begin{cases} 6x-2y=11 \\ x+3y=4 \end{cases}$ بطريقة التعويض.

## مثال 4

**تطبيقات: تجارة**

يبيع سوران القُبّعات في المباراة النهائية لكرة القدم. لديه 100 قُبّعة من الموسم الماضي و300 قُبّعة جديدة. يرغب سوران في هذا الموسم أن يبيع جميع القُبّعات التي لديه بقيمة 000 300 5 دينار. كم عليه أن يُحدِّد ثمن القُبّعة الجديدة وثمن القُبّعة القديمة ليحقّق هدفه، علمًا بأن ثمن القُبّعة الجديدة يزيد 000 7 دينار على ثمن القُبّعة القديمة؟

**الحل**

ابدأْ باختيار المجهولَيْن. اختر المجهول $d$ رمزًا لثمن القُبّعة القديمة والمجهول $n$ رمزًا لثمن القُبّعة الجديدة.

اكتبْ نظام المعادلتَيْن الذي يشكّل نموذجًا لحلّ المسألة: $\begin{cases} 300n+100d=5\ 300\ 000 \\ n=d+7000 \end{cases}$

عوِّض عن $n$ في المعادلة الأولى بقيمته $d+7$ ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$300(d+7000)+100d=5\ 300\ 000$

$300d+2100\ 000+100d=5\ 000\ 000$

$400d+2\ 100\ 000=5\ 300\ 000$

$400d=3\ 200\ 000$

$d=8000$

عوِّض عن $d$ بالقيمة 8 000 في المعادلة الثانية، ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$n=8000+7000$

$n=15\ 000$

الحل هو$(15000, 8000)$. على سوران أن يبيع القُبّعة الجديدة بسعر 15 000 دينار، والقديمة بسعر 8 000 دينار.

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

**1** إذا علمت أن $y = 42$ ، فكيف تستعمل التعويض لحلّ المعادلة $y = x + 8$ ؟

**2** لديك المعادلتان $-4x + y = 2$ وَ $2x + 3y = 34$ . اختر المجهول الأسهل والمعادلة الأسهل لتبدأ الحل بها، وبيِّن سبب اختيارك. حُلَّ.

**3** أوضحْ كيف تستعمل التعويض لحل النظام $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$

## تمارين موجَّهة

**حُلَّ النظام بالتعويض، ثم تحقَّق من الحلّ.**

**4** $\begin{cases} 5x = 3y + 12 \\ x = 5 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

**6** $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

**7** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

## تمارين وتطبيقات

**8** مجموع عددَيْن يساوي 27. أكبرهما يزيد 3 على الآخر. ما هما؟

**حُلَّ كل نظام.**

**9** $\begin{cases} 2x + 8y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$

**10** $\begin{cases} x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

**11** $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

**12** $\begin{cases} y = 5 - x \\ 1 = 4x + 3y \end{cases}$

**13** $\begin{cases} 2x + y = -92 \\ 2x + 2y = -98 \end{cases}$

**14** $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

**15** $\begin{cases} 6y = x + 18 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

**16** $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

**17** $\begin{cases} 2y + x = 4 \\ y - x = -7 \end{cases}$

**18** $\begin{cases} 4y - x = 15 \\ y + x = 6 \end{cases}$

**19** $\begin{cases} y = x - 3 \\ y + y = 5 \end{cases}$

**20** $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$

**21** $\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases}$

**23** $\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases}$

**24** $\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases}$

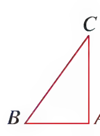
**25** $\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases}$

**26** $\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases}$

ربط

**27** **هندسة** احسب طول مستطيل وعرضه، علمًا بأن محيطه يساوي 208m، وطوله يساوي ضعف عرضه.

**28** **هندسة** مجموع قياسَي الزاويتَيْن $B$ وَ $C$ في المثلّث المقابل 90 درجة. احسب قياس كل زاوية من زوايا المثلّث علمًا بأن قياس الزاوية $B$ ينقص 30 درجة عن ضعف قياس الزاوية $C$.




ربط

**29** **نظرية الأعداد** العدد $x$ يقل 4 عن ثلاثة أضعاف العدد $y$. إذا أنقصتَ ضعفي $y$ من مجموع 3 مع ضعفي $x$ تحصل على 11. ما هذان العددان؟

**اكتب نظام معادلتَيْن خطّيّتَيْن لكلّ مسألة ثم حُلَّه.**

**30** **تسلية** انطلق منطاد من الأرض صعودًا بسرعة 4m في الدقيقة. وباشر في الوقت نفسه منطاد آخر على ارتفاع 756m بالهبوط بسرعة 3m في الدقيقة. بعد كم دقيقة يلتقي المنطادان؟

**31** **أعمال خيرية** أقامت جمعية العناية الخيرية حفلاً قدّمت خلاله المرطِّبات لعدد من للراشدين والأولاد بلغ 210 أشخاص، وجمعتْ 935 ألف دينار كان ثمن المشروب للراشد 6 آلاف دينار وللولد 3.5 آلاف دينار.

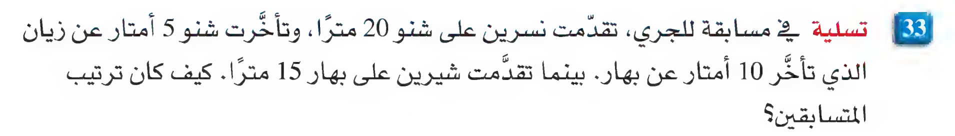
أ اكتب معادلة تُبيِّن كيف جُمِّع المبلغ بكامله.

ب اكتب معادلة تُبيِّن العدد الإجمالي للأشخاص.

ج حُلَّ نظام المعادلتَيْن الذي حصلت عليه. كم كان عدد الراشدين؟ وكم كان عدد الأولاد؟

**32** **نافذة على الثقافة الصينية** تذكر مسألة صينية أن عددًا من الفلاحين تشاركوا في دفع ثمن أداة زراعية. إذا دفع كل منهم 8 قطع نقدية، زاد المبلغ المجمَّع 3 قطع عن المطلوب. وإذا دفع كل منهم 7 قطع نقدية، نقص المبلغ المجمَّع 4 قطع عن المطلوب. كم كان عدد الفلاحين وكم كان ثمن الأداة؟

## نظرة إلى الوراء



**33** **تسلية** في مسابقة للجري، تقدّمت نسرين على شنو 20 مترًا، وتأخَّرت شنو 5 أمتار عن زيان الذي تأخَّر 10 أمتار عن بهار. بينما تقدَّمت شيرين على بهار 15 مترًا. كيف كان ترتيب المتسابقين؟

**حُلَّ المعادلة.**

**34** $\frac{x}{15}=3$

**35** $\frac{3}{x}=15$

**36** $\frac{15}{x}=3$

**37** $\frac{x}{3}=15$

**38** 42% من عدد يساوي 12.6. ما هذا العدد؟

## نظرة إلى الأمام

**استعمل التعويض لحلّ كل نظام. (لاحظ 3 معادلات بثلاثة مجاهيل).**

**39** $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ y+3z=3 \\ z=2 \end{cases}$

**40** $\begin{cases} 2x+3y+5z=44 \\ 2y-6z=4 \\ z=4 \end{cases}$




# حلّ الأنظمة الخطيّة بالحذف

## Solving Linear Systems by Elimination

**الأهداف**

- يحلّ نظامًا من معادلتَيْن خطّيَّتَيْن بطريقة الحذف.



**لماذا**

يشكّل الحذف طريقة جديدة توفّر حلاً سريعًا لأنظمة المعادلتَيْن الخطّيَّتَيْن المعقدة التي تصادفها في هذا الدرس.

**تطبيقات**

**تأجير سيارات**

يقوم مكتب هوار بتأجير السيّارات. يدفع السائح مبلغًا من المال عن كل يوم يستأجر فيه السيّارة، ومبلغًا آخر عن كلّ كيلومتر تقطعه السيارة. استأجر كل من الصديقين رزكَار وزانا سيّارة من شركة هوار للقيام برحلة. دامت رحلة رزكَار يومَيْن قطع خلالها 125 كم، ودامت رحلة زانا 4 أيّام قطع خلالها 350 كم. دفع رزكَار 287.25 ألف دينار ، ودفع زانا 697.50 الف دينار. حدِّد أُجرة السيّارة في اليوم، وكلفة الكيلومتر.

يمكنك كتابة نظام معادلتَيْن خطَيّتَيْن ثم حُلَّه لتحديد كلٍّ من المبلغَيْن.

ابدأ بتعريف المجهولَيْن اللذَيْن يرمزان إلى المبلغَيْن.

المجهول $d$: يرمز إلى أُجرة السيارة في اليوم.

المجهول $k$: يرمز إلى كلفة الكيلومتر.

انطلاقًا من المعلومات أعلاه. يمكنك أن تكتب نظام المعادلتين

$$\begin{cases} 2d+125k=287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$$

يمكنك بالطبع، أن تحلّ هذا النظام بطريقة التعويض. إلا أن ذلك ليس بالأمر اليسير. سوف تتعلم في هذا الدرس طريقة جديدة لحلّ أنظمة معقّدة.

## النشاط

### استعمال المعكوسات Using Inverses

سوف تحلّ نظام المعادلتَيْن $\begin{cases}3x+2y=7\\5x-2y=9\end{cases}$

**1.** تتضمَّن المعادلتان حدَّين متعاكسَيْن. ما هما؟

**2.** استعمل خاصية الجمع للمساواة لتحصُلَ على معادلة انطلاقًا من المعادلتَيْن (اجمع $3x+2y$ مع $5x-2y$ و 7 مع 9). كم مجهولاً تتضمّن المعادلة الجديدة؟

**3.** حُلَّ المعادلة الجديدة لتحديد قيمة المجهول، ثم عوِّض عن هذا المجهول بقيمته في واحدة من المعادلتَيْن الأساسيَّتَيْن. حُلَّ المعادلة الناتجة من ذلك لتحديد قيمة المجهول الثاني .

**4.** تحقَّق من أن القيمتَيْن اللتَيْن حصلت عليهما للمجهولَيْن $x$ وَ $y$ تشكِّلان حلاً لنظام المعادلتَيْن.

**5.** أوضحْ كيف تستعمل المعكوسات لحلّ نظام معادلات.




## طريقة الحذف Elimination Method

استعملت في النشاط السابق **طريقة الحذف Elimination Method** لحل نظام المعادلتَيْن.
تستعمل هذه الطريقة المعكوسات لحذف أحد المجهولَيْن.







**استعمل طريقة الحذف لحل النظام** $\begin{cases}3x+4y=7\\2x-4y=13\end{cases}$

**الحـل**

استعملْ خاصّية الجمع في المساواة لتحصل على معادلة تتضمَّن $x$ فقط انطلاقًا من المعادلتَيْن. حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\2x-4y&=13\\\hline 5x+0&=20\\5x&=20\\x&=4\end{aligned}$$

لاحظ أن $4y$ وَ $-4y$ متعاكسان

لتحديد قيمة $y$، عوِّض عن $x$ بقيمته 4 في المعادلة الأولى.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\3(4)+4y&=7\\12+4y&=7\\4y&=-5\\y&=-1.25\end{aligned}$$

حلّ النظام هو $(4, -1.25)$ .

عوِّض عن $x$ بقيمته 4، وعن $y$ بقيمته $-1.25$ في كلّ من المعادلتَيْن الأساسيَّتَيْن للتحقُّق من الحل.

$$\begin{aligned}3(4)+4(-1.25)&\stackrel{?}{=}7\\12+(-5)&\stackrel{?}{=}7\\7&=7\ \text{صواب}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(4)-4(-1.25)&=13\\8-(-5)&=13\\13&=13\ \text{صواب}\end{aligned}$$

لاحظ أن مُعاملي المجهول $y$ في المعادلتَيْن متعاكسان، الأمر الذي يجعل حلّ هذا النوع من أنظمة المعادلات سهلاً.

يتطلّب الأمر أحيانًا أن تضرب طرفي إحدى المعادلتين أو كلتيهما بعدد للحصول على متعاكسَيْن يسمحان بحذف أحد المجهولَيْن. يسهِّل هذا الأمر كون معاملِ أحد المجهولين في إحدى المعادلتَيْن يساوي 1. لكن يمكنك تطبيق هذه التقنية على أنظمة أكثر تعقيدًا مثل نظام المثال 2.

**مثال 2** استعمل طريقة الحذف لحل النظام $\begin{cases}2x+3y=1\\5x+7y=3\end{cases}$

**الحل**

اضرب طرفي المعادلة الأولى في 5 وطرفي المعادلة الثانية في 2− بغية الحصول على متعاكسَيْن.

$\begin{cases}(5)2x+(5)3y=(5)1\\(-2)5x+(-2)7y=(-2)3\end{cases}$ أو $\begin{cases}10x+15y=5\\-10x-14y=-6\end{cases}$

استعمل الآن خاصّية الجمع للمساواة لتحصل على معادلة جديدة فيها مجهول واحد هو $y$، ثم حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{aligned}10x+15y&=5\\-10x-14y&=-6\\\hline y&=-1\end{aligned}$$

عوّض الآن عن $y$ بقيمته في المعادلة الأولى.

$$\begin{aligned}2x+3y&=1\\2x+3(-1)&=1\\2x-3&=1\\2x&=4\\x&=2\end{aligned}$$

الحل هو $(2, -1)$ .

تحقّق من الحل بالتعويض عن كلّ من المجهولَيْن بقيمته في كل من المعادلتَيْن.

$2(2)+3(-1)\overset{?}{=}1$ | $5(2)+7(-1)\overset{?}{=}3$

$4+(-3)\overset{?}{=}1$ | $10+(-7)\overset{?}{=}3$

$1=1$ صواب | $3=3$ صواب

**مثال 3** استعمل طريقة الحذف لحل المسألة التي طُرحت في أوّل الدرس $\begin{cases}2d+125k=287\ 250\\4d+350k=679\ 500\end{cases}$

**الحل**

اضرب طرفي المعادلة الأولى في 2− .

$\begin{cases}(-2)2d+(-2)125k=(-2)287\ 250\\4d+350k=679\ 500\end{cases}$

استعمل الآن خاصية الجمع للمساواة بغية الحصول على معادلة جديدة فيها مجهول واحد هو $k$، ثم حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{aligned}-4d+(-250k)&=-574\ 500\\4d+\ 350k&=\ 679\ 500\\\hline 100k&=105\ 000\\k&=1050\end{aligned}$$

عوِّض عن $k$ بقيمته في المعادلة الأولى لتحديد قيمة $d$.

$$\begin{aligned}2d+125(1050)&=287\ 250\\2d+131\ 250&=287\ 250\\2d&=156\ 000\\d&=78\ 000\end{aligned}$$

حل نظام المعادلات السابق هو$(78\ 000; 1050)$. يمكنك التحقُّق من صحتّه بالتعويض. أُجرة السيّارة في اليوم 78 ألف دينار، وكلفة الكيلومتر 1050 دينارًا.

**حـــاولْ** حُلَّ كل نظام بطريقة الحذف.

أ) $\begin{cases}2x-y=7\\5x+4y=11\end{cases}$

ب) $\begin{cases}3x-2y=6\\5x+7y=41\end{cases}$

# التمـــــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

دُلَّ على الحدَّيْن المتعاكسَيْن في كل نظام واشرح كيف تحلُّه.

**1** $\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases}$

**2** $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases}$

**3** $\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases}$

**تطبيقات**

اشرح الخطوات الواجب اتِّباعها لحلّ كل نظام بطريقة الحذف.

**4** $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$

**6** $\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases}$




حُلَّ النظام بالحذف ثم تحقّق من الحل.

**7** $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

**8** $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

**9** $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases}$

**10** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases}$

## تمارين وتطبيقات

حُلَّ النظام بالحذف وتحقّق من صحة الحل.

**11** $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases}$

**12** $\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases}$

**13** $\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases}$

**14** $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

**15** $\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases}$

**16** $\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases}$

**17** $\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases}$

**18** $\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases}$

**19** $\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases}$

**20** $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases}$

**21** $\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases}$

**23** $\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

**24** $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases}$

**ربـــــط**

**اكتب نظام معادلتَيْن لكل مسألة. اختر الطريقة الفضلى لحلّ النظام. حُلَّ النظام وتحقَّق من صحَّة الحل.**

**تطبيقات**

**25** **رياضيات المستهلك** قرَّر أستاذ الرياضيات الاحتفال مع تلاميذه بذكرى ولادة عالم الرياضيات الخوارزمي. اشترى 3 فطائر بيتزا و3 علب عصير كبيرة لتلاميذ الشعبة الأولى ودفع 54 ألف دينار. واشترى 4 فطائر بيتزا وَ6 علب عصير كبيرة لتلاميذ الشعبة الثانية ودفع 78 ألف دينار . ما ثمن فطيرة البيتزا وما ثمن علبة العصير؟

**26** **مدخول** يعمل بارام حارسًا في أحد مواقف السيّارات. يتقاضى أجرًا ثابتًا مقابل 15 يوم عمل في الشهر وأجرًا إضافيًّا عن كل يوم عمل إضافي. عمل بارام 25 يومًا في الشهر الأول وتقاضى 720 ألف دينار، وعمل 22.5 يومًا في الشهر الثاني وتقاضى 641.25 ألف دينار. ما أجره الثابت وما أجر اليوم الإضافي؟

**27** **تجارة** يبيع متجر الألحان أشرطة موسيقية من نوعين: أشرطة المنوّعات وأشرطة الموسيقى الكلاسيكية. يبلغ ثمن شريط المنوعات 21 ألف دينار، وثمن شريط الموسيقى الكلاسيكية 33 الف دينار. باع المتجر في أحد الأيام 25 شريطًا من النوعين، وكانت غلّته 693 ألف دينار. كم شريط منوّعات وكم شريط موسيقى كلاسيكية باع المتجر؟

**28** **استئجار المنازل** يدفع مستأجر المنزل تأمينًا مع أجرة الشهر الأول. دفع جوامير 700 2 ألف دينار في الشهر الأول وَ850 20 ألف دينار على مدار السنة. ما قيمة التأمين وما قيمة أجرة المنزل في الشهر؟

**29** **سياحة** قدّم فندق البحر الأحمر عرضَيْن في عطلة نهاية الأسبوع. يتضمَّن العرض الأول ليلتَيْن وَ4 وجبات طعام بقيمة 500 61 دينار ويتضمَّن العرض الثاني 3 ليالٍ وَ8 وجبات طعام بقيمة 750 102 دينارًا. ما كلفة الليلة الواحدة؟ وما كلفة وجبة الطعام؟

## نظرة إلى الوراء

**حُلَّ المعادلة.**

**30** $-5=-x+7$ **31** $3x-2=2x+1$ **32** $\frac{1}{2}x+3=2$

## نظرة إلى الأمام

**33** **تكنولوجيا** ارسم المستقيمَيْن $2x-3y=6$ وَ $4x-6y=18$ في المستوى الإحداثي نفسه. صف ما حصلت عليه. استعمل حاسبة بيانية إذا أمكن.




# المقادير الجذرية

## Radical Expressions

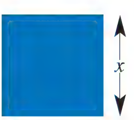


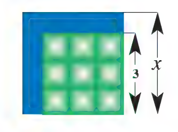

**الأهداف**

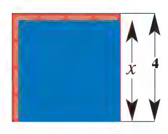
- يحسب قيمة مقدار يتضمَّن جذورًا.
- يبسّط مقادير تتضمَّن جذورًا.

## تقدير الجذر التربيعي Estimating Square Root

مع سانا مربّع أزرق مساحته 12 وحدة مربّعة. كيف تحدِّد طول ضلع المربّع؟
تذكّر أن قاعدة حساب مساحة المربّع تسمح لك بكتابة $x^2 = 12$ حيث يرمز المتغيِّر $x$ إلى طول ضلع المربّع الأزرق. إذًا، طول ضلع المربّع الأزرق هو الجذر التربيعي للعدد 12.
بما أن 12 ليس مربّعًا كاملاً، فإن عليك تقدير طول الضلع $x$. لاحظ أن 12 يقع بين المربّعين الكاملين 9 وَ 16.








مساحة المربّع الأزرق أقرب إلى 9 منه إلى 16. ينتج من ذلك أن ضلعه يقع بين 3.4 وَ 3.5. احسبْ مربع الأعداد العُشرية من رقمَيْن بعد الفاصلة والواقعة بين 3.4 وَ3.5.

| | | |
|---|---|---|
| $3.4^2 = 11.56$ | $3.41^2 = 11.6281$ | $3.42^2 = 11.6964$ |
| $3.43^2 = 11.7649$ | $3.44^2 = 11.8336$ | $3.45^2 = 11.9025$ |
| $3.46^2 = 11.9716$ | $3.47^2 = 12.0409$ | $3.48^2 = 12.1104$ |
| $3.49^2 = 12.1801$ | $3.5^2 = 12.25$ | |

إذًا، أفضل تقدير للجذر التربيعي للعدد 12 هو 3.46، أي إن $\sqrt{12} \simeq 3.46$ .

**الجذر التربيعي Square Root**

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًّا غير سالب، فإن له جذرين تربيعيَّين أحدهما موجب، ويُكتب $\sqrt{a}$ والآخر سالب ويكتب $-\sqrt{a}$ . ويحقِّق هذان العددان الخاصّية التالية

$$\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}\right) = a \quad \text{وَ} \quad \left(-\sqrt{a}\right)\left(-\sqrt{a}\right) = a$$

## تبسيط المقادير الجذرية Simpligying Radical Expressions

**المقادير الجذرية Radical Expressions** هي المقادير التي تتضمَّن جذورًا. عندما تريد أن تجمع مقادير جذرية أو تطرحها، تأكّد من أن الأعداد الواقعة تحت رمز الجذر متساوية. مثلاً، تستطيع جمع المقدارين $2\sqrt{5}$ وَ $4\sqrt{5}$ فتحصل على $2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ .

### مثـــال 1

بسِّط المقدار.

أ $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}$

ب $5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

ج $8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

د $b\sqrt{x}+y\sqrt{x}$

**الحــل**

أ استعمل خاصّية التوزيع لتجميع الحدود المتشابهة ثم احسبْ. العامل المشترك هو $\sqrt{6}$ .

$$5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=(5-2)\sqrt{6}=3\sqrt{6}$$

ب أعد ترتيب الحدود لتسهيل التبسيط.

$$5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3=5-3+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}=2+4\sqrt{7}$$

ج أعد ترتيب الحدود لتسهيل التبسيط.

$$8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}=8\sqrt{3}-\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{3}+8\sqrt{2}$$

د تعامل مع المتغيّرات كما لو كانت أعدادًا.

$$b\sqrt{x}+y\sqrt{x}=(b+y)\sqrt{x}$$

**حــاول** بسِّط المقدار. أ $4\sqrt{6}-\sqrt{6}$ ب $y+2\sqrt{x}-2y-3\sqrt{x}$

### النشاط

## المقادير الجذرية والعمليات Operations with Radical Expressions

استعمل العلاقة بين الجذور والقوى ذات الأُسّ النسبي، للقيام بالعمليات.

1. احسب $\sqrt{9\times16}$ بطريقتَيْن.

أ $\sqrt{9\times16}=\sqrt{144}=?$ ب $\sqrt{9\times16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=?$

2. أعطِ ثلاثة أمثلة تؤكّد أن العلاقة $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ صحيحة.

3. احسب $\sqrt{9+16}$ وَ $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ وقارن النتيجتَيْن.

4. أعطِ ثلاثة أمثلة تبيِّن أن $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ليست دائمًا صحيحة.

نقطة مراقبة √

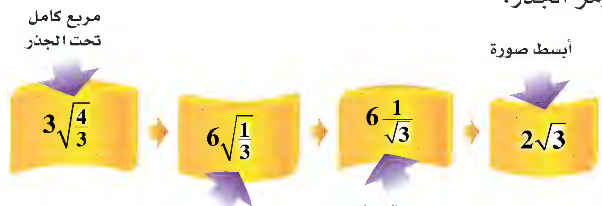
### ضرب الجذور التربيعية Multiplying Square Roots

أيًّا يكن العددان الحقيقيان غير السالبَيْن $a$ وَ $b$، فإن:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

إن التعامل مع المقادير الجذرية المبسّطة أسهل من التعامل مع المقادير غير المبسّطة. يكون المقدار الجذري على **أبسط صورة Simplist form** إذا توفَّرت الشروط التالية:

1. عدم وجود مربّع كامل بين عوامل العدد الواقع تحت رمز الجذر.
2. عدم وجود كسر أو كسور تحت رمز الجذر.
3. عدم وجود جذور في مقام أي كسر يشكّل جزءًا من المقدار. (تذكّر تنسيب المقام)




## مثال 2

اكتب المقدار على أبسط صورة.

أ $\sqrt{12}$ ب $\sqrt{400}$ ج $\sqrt{a^2}$ د $\sqrt{a^5b^{10}}$

**الحل**

ابحث عن المربّعات الكاملة بين **العوامل Factors**، واستعمل خاصّية ضرب الجذور التربيعية.
بسّط الجذور التربيعية لهذه المربّعات. اترك العوامل الأخرى.

أ $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

ب $\sqrt{400}=\sqrt{4}\times\sqrt{100}=2\times10=20$

بما أن رمز الجذر التربيعي يدلّ على الجذر غير السالب، فإن $\sqrt{a^4}$ غير سالب. استعملْ رمز المطلق للدلالة على ذلك عندما يكون أُسّ المتغيّر تحت رمز الجذر زوجيًّا، ويصبح خارج الرمز، بعد التبسيط، فرديًّا.

ج $\sqrt{a^2}=|a^1|=|a|$

د $\sqrt{a^5b^{10}}=\sqrt{a(a^2)^2(b^5)^2}=a^2|b^5|\sqrt{a}$

**حاولْ** اكتب المقدار على أبسط صورة $\sqrt{72m^2n^5}$ .

**تفكير ناقد** لماذا لا يعتبر استعمال رمز المطلق ضروريًّا فيما يلي:

أ $\sqrt{b^3}=b\sqrt{b}$ ب $\sqrt{b^4}=b^2$

## مثال 3

اكتب المقدار على أبسط صورة.

أ $\left(5\sqrt{3}\right)^2$ ب $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

ج $\sqrt{2}\left(6+\sqrt{12}\right)$ د $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)$

**الحل**

أ تذكَّر أن مربَّع عدد هو ناتج ضرب هذا العدد في نفسه. طبِّق هذه الفكرة، ثم أعد ترتيب العوامل قبل الضرب.

$$\left(5\sqrt{3}\right)^2=\left(5\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3}\right)=\left(5\times5\right)\left(\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right)=25\times3=75$$

ب استعمل خاصّية ضرب الجذور. حلِّل ناتج الضرب الواقع تحت رمز الجذر ثم بسِّط.

$$\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{3\times6}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

ج استعمل خاصّية التوزيع لكي تضرب وتحلّل وتبسّط.

$$\sqrt{2}\left(6+\sqrt{12}\right)=6\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{12}=6\sqrt{2}+\sqrt{2\times12}$$
$$=6\sqrt{2}+\sqrt{24}=6\sqrt{2}+\sqrt{6\times4}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

د $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)=12+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2=10-\sqrt{2}$

**حـــاول** اكتب المقدار على أبسط صورة. أ $\left(2\sqrt{7}\right)^2$ ب $\sqrt{2}\left(4-\sqrt{8}\right)$

### قسمة الجذور التربيعية Dividing Square Roots

أيًّا يكن العددان الحقيقيان الموجبان $a$ و $b$ فإن

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**مثـــــال 4** **اكتب المقدار على أبسط صورة.**

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}$ ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}$

**الحـــل**

اكتب كل جذر تربيعي بعد استعمال خاصّية قسمة الجذور. اكتب على أبسط صورة كلاًّ من البسط والمقام على حدة.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}=\frac{|a|b\sqrt{b}}{|c|}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

إن مقام الجواب الأخير يتضمّن جذرًا. فإذا أردت التخلّص منه، اضرب المقدار في $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ الذي يساوي 1.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

تُسمّى عملية التخلّص من الجذر في المقام **تنسيب المقام**.

**حـــاولْ** اكتب المقدار على أبسط صورة. أ $\sqrt{\frac{4}{24}}$ ب $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ج $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$

## التمـــــاريـــــن

### التواصل في الرياضيات

1 أوضحْ كيف تستعمل الورق البياني لتحديد الجذر التربيعي للعدد 16 (مربّع كامل).

2 أوضحْ كيف تستعمل الورق البياني لتقدير الجذر التربيعي للعدد 19 (ليس مربّعًا كاملاً).

3 أوضحْ كيف تقدِّر $\sqrt{7}$ من دون استعمال الحاسبة أو الورق البياني.

4 كيف تستعمل التحليل لتبسيط مقدار جذري كالمقدار $5\sqrt{90x^3y^4}$ ؟

5 ما الصورة الأبسط لمقدار جذري؟

## تمارين موجَّهة

احسب.

6 $\sqrt{36}$ 7 $-\sqrt{64}$ 8 $\pm\sqrt{81}$ 9 $-\sqrt{121}$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

10 $8\sqrt{3}-6\sqrt{3}$ 11 $9+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+4$

اكتبِ المقدار على الصورة الأبسط.

12 $\sqrt{32}$ 13 $\sqrt{x^2y^7}$ 14 $\sqrt{27x^2}$ 15 $\sqrt{a^7b^3}$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

16 $(7\sqrt{11})^2$ 17 $\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ 18 $(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$

19 $\sqrt{\frac{9}{4}}$ 20 $\sqrt{\frac{6}{49}}$ 21 $\sqrt{\frac{225}{18}}$ 22 $\sqrt{\frac{x^7y^{14}}{z^3}}$

## تمارين وتطبيقات

احسب الجذر التربيعي. إذا كان الجذر التربيعي غير نسبي، فقرِّبه إلى أقرب جزء من مئة.

23 $\sqrt{225}$ 24 $-\sqrt{169}$ 25 $-\sqrt{11}$ 26 $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 27 $-\sqrt{40}$

28 $-\sqrt{27}$ 29 $\sqrt{1000}$ 30 $\sqrt{10000}$ 31 $-\sqrt{0.04}$ 32 $\sqrt{0.059}$

بسِّط باستعمال التحليل.

33 $\sqrt{49}$ 34 $\sqrt{196}$ 35 $\sqrt{576}$ 36 $\sqrt{3600}$ 37 $\sqrt{192}$

38 $\sqrt{75}$ 39 $\sqrt{98}$ 40 $\sqrt{1620}$ 41 $\sqrt{264}$ 42 $\sqrt{648}$

افترضْ أن كلاً من $a$ وَ $b$ يدلّ على عدد موجب، اذكرْ إن كانت الجملة صحيحة أو لا.

43 $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 44 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 45 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

46 $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ 47 $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$ 48 $\sqrt{48}\times\sqrt{3}$ 49 $\sqrt{54}\times\sqrt{6}$

50 $\sqrt{\frac{64}{16}}$ 51 $\sqrt{\frac{96}{2}}$ 52 $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$ 53 $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$

54 $\sqrt{5}\times\sqrt{15}$ 55 $\sqrt{98}\times\sqrt{14}$ 56 $\sqrt{\frac{56}{8}}$ 57 $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$

اكتب المقدار على أبسط صورة، مفترضًا أن جميع المتغيّرات غير سالبة، وأن جميع المقامات مختلفة عن الصفر.

58 $\sqrt{a^4b^6}$ 59 $\sqrt{x^8y^9}$ 60 $\sqrt{\frac{a^6}{b^{10}}}$ 61 $\sqrt{\frac{x^3}{y^6}}$

نفِّذ العمليات الممكنة واكتب الجواب على أبسط صورة.

**62** $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ **63** $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}$ **64** $\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

**65** $(4+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})$ **66** $\frac{6+\sqrt{18}}{3}$ **67** $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

**68** $(3\sqrt{5})^2$ **69** $(4\sqrt{25})^2$ **70** $\sqrt{12}\times\sqrt{6}$

**71** $\sqrt{72}\times\sqrt{32}$ **72** $3(9+\sqrt{5})$ **73** $\sqrt{5}(6-\sqrt{15})$

**74** $\sqrt{6}(6+\sqrt{18})$ **75** $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$ **76** $(\sqrt{3}-4)(\sqrt{3}+2)$



تحدٍّ **77** $\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)^2$ **78** $\sqrt{12}(\sqrt{3}+8)^2$ **79** $\sqrt{5}(\sqrt{5}-4)^2$

ربط **هندسة** حدِّد طول ضلع مربَّع مساحته:



**80** $250\text{m}^2$ **81** $144\text{m}^2$ **82** $28\text{m}^2$

تطبيقات **83** **حدائق** أمام بيت شيرين حديقة مربَّعة الشكل مساحتها $676\text{m}^2$ . ما طول ضلعها؟

## نظرة إلى الوراء

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

**84** $(-a^2b^2)^3(a^4b^2)^3$ **85** $\frac{x^5y^7}{x^2y^3}$ **86** $\left(\frac{20x^3}{-4x^2}\right)^3$

اضرب.

**87** $(2x-4)(2x-4)$ **88** $(3d+5)(2d-6)$ **89** $(6b+1)(3b-1)$

## نظرة إلى الأمام

تُستعمل القوى ذات الأسّ النسبي للتعبير عن الجذور فتكتب $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ حيث $a$ عدد حقيقي غير سالب، وَ $n$ عدد صحيح لا يقلّ عن 2. مثلاً:

$\sqrt[3]{27}=3$ لأن $3^3=27$ وَ $\sqrt[4]{16}=2$ لأن $2^4=16$

استعمل قوانين القوى لكتابة المقادير على أبسط صورة. مثال على ذلك:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=x^{\frac{8}{2}}=x^4$$

بسِّط

**90** $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4\left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}$ **91** $(xy)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2$

**92** $\left(x^3y^{\frac{3}{2}}\right)^6(xy)^{\frac{1}{2}}$

مشروع الفصل



# الأنماط في المعطيات

**استعمل الإنسان الأنماط لحل المسائل منذ بدايات التفكير الرياضي. سوف تستعمل في هذا المشروع أنماطًا لحل مسائل متنوّعة وللتعمّق أكثر فأكثر في عالم الجبر.**

## النشاط 1

اهتم علماء الإغريق ببناء مستطيلات اعتبروها مريحة للنظر. ميّزوا هذه المستطيلات بنسبة طولها إلى عرضها (ما يقارب 1.618)، وسمّوها **المستطيلات الذهبية Golden Rectangles** وسمّوا هذه النسبة، **النسبة الذهبية Golden Ratio**. وقد توصّل علماء النفس فيما بعد إلى أن الإنسان يفضّل لاشعوريًّا الأشكال المستطيلة التي تقترب من المستطيلات الذهبيّة.

من ناحية أخرى، أنشأ عالم الرياضيات الإيطالي فيبوناتشي Fibonacci أعدادًا متتالية عرفت باسمه. العدد الأول منها 1 والثاني 2. أما الأعداد الأخرى فيساوي كل منها مجموع العددَيْن السابقَيْن له.

1 اكتبِ الأعداد العشرة الأولى من بين أعداد فيبوناتشي.

2 استعملِ الحاسبة لإكمال الجدول أدناه، وحساب نسبة كل عدد إلى العدد الذي يسبقه.

| عدد فيبوناتشي | العدد التالي | نسبة التالي إلى العدد |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 1.667 |
| 5 | 8 | ? |
| 8 | 13 | ? |
| ? | ? | ? |
| ? | ? | ? |
| ? | ? | ? |

3 ارسم مستطيلات مستعملاً لطولها وعرضها عددَيْن متتاليَيْن من أعداد فيبوناتشي. استعمل السنتيمتر أو المليمتر كوحدة طول.

4 قارن نسبة الطول إلى العرض في كل مرة مع النسبة الذهبية.

5 أي من المستطيلات التالية أقرب إلى أن يكون مستطيلاً ذهبيًّا؟

أ بطاقة $3 \times 5$ ب صورة $5 \times 7$

ج صورة $5 \times 8$ د صورة $8 \times 10$

6 هل تتفق مع القائلين أن العين ترتاح للنظر إلى المستطيلات الذهبية؟

## النشاط 2

1 اختر مع زملاء لك 20 شكلاً دائريًّا. قس المحيط $(c)$ والقطر $(d)$ لكل منها. نظِّم جدولاً بالمعطيات.

2 احسبْ نسبة المحيط إلى القطر $\frac{c}{d}$ في كل دائرة.

3 مثِّل الأزواج المرتّبة $(d, c)$ في المستوى الإحداثي.

4 استعمل مسطرة شفّافة لرسم المستقيم الذي يمر في أكبر عدد من النقاط أو قريبًا منها.

5 احسبْ مَيل هذا المستقيم.

6 ما العلاقة بين المَيل الذي حسبته والعدد $\pi$ ؟ استخلص من ذلك القاعدة التي تسمح بحساب محيط الدائرة بمعرفة قطرها. ما هي هذه القاعدة؟



# مراجعة

في التمارين من 1 إلى 5، تعبّر المساواة عن خاصّية من خصائص العمليات على الأعداد الحقيقية. ما هي؟

**1** $a(2b)=(2b)a$

**2** $2\times 1=2$

**3** $b\left(\frac{1}{b}\right)=1$

**4** $3x+0=3x$

**5** $5(2-x)=5\times 2+5(-x)$

احسب قيمة المقدار، في التمارين من 6 من إلى 9.

**6** $(-1)\times(5+3)^2-11$

**7** $\frac{(11-5)^2}{3\times 2}$

**8** $\frac{(6-12)^5}{-3^2}$

**9** $\frac{32-(13+4)}{(-3)^2}$

**اقتصاد** بلغت قيمة المتوجّب على سارا مقابل استعماله الإنترنت خلال الشهر الماضي 88 ألف دينار. يتوزّع هذا المبلغ بين الاشتراك، وقيمته 55 ألف دينار في الشهر، وكلفة استعمال الإنترنت، وقيمتها 3 آلاف دينار في الساعة.

**10** اكتب معادلة تمثّل المتوجب على سارا حيث يرمز $x$ إلى عدد الساعات.

**11** حُلَّ المعادلة وحدِّد كم ساعة استعمل سارا الإنترنت.

**12** حُلّ المعادلة $F=\frac{9}{5}C+32$ حاسبًا $C$ بدلالة $F$.

حُلَّ المُتباينة المُركّبة ومثّل مجموعة الحلول على محور الأعداد.

**13** $(-3x-8\leq 7)\wedge(-4x>-18)$ .

**14** $(4x-3<29)\vee(-3x<-5)$ .

**15** احسب قيمة المقدار $\left(\frac{5^{-2}\times 5^3}{5^2}\right)^2$ .

في التمارين من 16 إلى 18، اكتب المقدار على أبسط صورة.

**16** $x^4(3x)^2$

**17** $\frac{(ab^2)^3}{c^2}$

**18** $\left(\frac{p^{-1}q^2}{p^{-2}}\right)^{-4}\left(\frac{p^{-3}q^{-3}}{p^{-3}q^{-1}}\right)^{-3}$

حُلَّ نظام المعادلات بالحذف، في التمرينَيْن 19 و20.

**19** $\begin{cases}9x+2y=2\\21x+6y=4\end{cases}$

**20** $\begin{cases}2y=3x-6\\y=x-2\end{cases}$

حُلَّ نظام المعادلات بالتعويض، في التمرينَيْن 21 و22.

**21** $\begin{cases}y=2x-4\\7x-5y=14\end{cases}$

**22** $\begin{cases}2x+10y=-2\\6x+4y=20\end{cases}$

في التمرينَيْن 23 و24، اكتب المقدار على أبسط صورة.

**23** $\sqrt{x^2y^4}\,(x^5y)^{\frac{1}{2}}$

**24** $\frac{(24m^8n)^{\frac{1}{2}}}{(mn^2)^{\frac{1}{2}}}$

نسِّب المقام واكتب المقدار على أبسط صورة، في التمارين من 25 إلى 28.

**25** $\sqrt{\frac{5}{25}}$

**26** $\sqrt{\frac{3}{49}}$

**27** $\sqrt{\frac{16}{5}}$

**28** $\sqrt{\frac{6}{14}}$

# 1 اختبار الفصل

**احسبْ قيمة كل مقدار مُطبِّقًا ترتيب العمليات.**

1) $5+2(7-4)^2$
2) $12-9\div3+2\times5$
3) $\frac{4+6}{2}+2\times5$
4) $5\times4\div2+3^{(4-1)}$

**ما الخاصّية التي استُعملت في كل مرّة، علمًا بأن جميع المُتغيّرات تمثّل أعدادًا حقيقيّة.**

5) $5x\times1=5x$
6) $7a-14=7(a-2)$
7) $\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right)=1$
8) $4(xy)=(xy)\times4$

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة، علمًا بأن جميع المتغيّرات مختلفة عن الصفر.**

9) $y^3(x^2y)$
10) $\frac{(9by)^2}{(3bxy)^3}$
11) $\frac{14x^{-3}a^4}{35x^5a^3}$
12) $\left(\frac{3x^4k^{-1}}{8x^{-2}k^3}\right)^{-2}$

13) **فيزياء** يمكن قياس الطاقة الحركية باستعمال القاعدة $k=\frac{1}{2}mv^2$ حيث يرمز $m$ للكتلة بالكيلوغرام، وَ $v$ للسرعة بالأمتار في الثانية، وَ $k$ للطاقة بالجول. ما طاقة جسم كتلته 100kg يتحرّك بسرعة 5m/s ؟

**حُلَّ كل معادلة.**

14) $4x-3=17$
15) $\frac{x}{3}-2=16$
16) $2x-0.8=2.4$
17) $8x+4=2x-32$

18) **هندسة** نقول عن زاويتين أنهما متتامتان إذا كان مجموع قياسيهما 90 درجة. اكتب معادلة وحُلّها لحساب قياسي زاويتَيْن متتامّتَيْن علمًا بأن قياس إحداهما يزيد 30 درجة على قياس الأخرى.

19) حُلّ المعادلة $m=\frac{1}{2}xk^2$ حاسبًا $k$ بدلالة المُتغيِّرَيْن الآخرَيْن.

**حُلَّ كل مُتباينة ومثِّل الحل بيانيًا.**

20) $-3x-6>15$
21) $2(4x-5)<6x-6$

**حُلَّ كل متباينة مُركَّبة ومثِّل الحلّ بيانيًا.**

22) $(3x+4>7)\wedge(2x-3<5)$
23) $(5x\ge3)\vee(-2+4x\le10)$

24) **تسلية** ذهب 5 أولاد برفقة 3 راشدين لزيارة حديقة الحيوانات وكان معهم 80 ألف دينار. اكتب مُتباينة تسمح بحساب الحد الأعلى لثمن بطاقة الولد علمًا بأن ثمن بطاقة الراشد 14 ألف دينار. ما الحدّ الأعلى؟

**حُلَّ كل نظام بالتعويض. تحقّق من الحلّ.**

25) $\begin{cases}2x-3y=1\\y=x-2\end{cases}$
26) $\begin{cases}x+y=3\\2x+3y=3\end{cases}$

27) **أعداد** مجموع عددين 7. 4 أمثال الأول تزيد 1 على 5 أمثال الثاني. حدِّد هذَيْن العددَيْن عن طريق كتابة نظام معادلات وحلِّه.

**حُلَّ كل نظام بالحذف. تحقّق من الحلّ.**

28) $\begin{cases}x+y=1\\x-2y=-8\end{cases}$
29) $\begin{cases}5x+2y=24\\2x-12=4y\end{cases}$
30) $\begin{cases}\frac{1}{3}x-y=4\\2x-6y=12\end{cases}$
31) $\begin{cases}4x+3y=0\\y-x=-7\end{cases}$

32) **استهلاك** ثمن 3 دفاتر وَ 4 كتب 250 7 دينارًا، وثمن 5 دفاتر وكتابين 600 6 دينار. احسب ثمن كل دفتر وثمن كل كتاب، عن طريق كتابة نظام معادلات وحلّه.

**احسب قيمة كل مقدار.**

33) $\left(3\sqrt{81}\right)^2-31$
34) $\frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{9}\right)^3+\left(\sqrt{64}\right)^2+2\right)$

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة مفترضًا أن قيم جميع المُتغيِّرات موجبة.**

35) $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$
36) $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5}}$
37) $\left(5-\sqrt{12}\right)\left(2\sqrt{27}+8\right)$
38) $\left(2-\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$






# اختبار تراكمي

**1** أي عدد من الأعداد التالية غير نسبي؟

أ $178.259\,259...$    ب $\sqrt{7}$

ج $\sqrt{49}$    د $-2315$

**2** أي عدد من الأعداد التالية صحيح؟

أ $17.\overline{259}$    ب $\sqrt{142}$

ج $(27)^{\frac{1}{3}}$    د $\frac{1235}{16}$

**3** مثِّل العددَيْن $-5$ وَ $3.25$ بنقطتين على محور الأعداد واحسب المسافة بينهما.

**4** مثِّل العددَيْن $3.\overline{7}$ وَ $-2.\overline{4}$ بنقطتَيْن على محور الأعداد واحسبِ المسافة بينهما.

**5** عن أي من خصائص العمليات تُعبِّر المساواة $3+(5+7)=(3+5)+7$ ؟

**6** عن أي من خصائص العمليات تعبِّر المساواة $2(a+b)=2a+2b$ ؟

**7** هل تتمتَّع عملية الطرح بخاصّية التبديل؟ أوضحْ بمثال.

**8** أعطِ مثالاً يبيِّن أن القسمة لا تتمتَّع بخاصِّية التبديل.

**9** حُلَّ المعادلة $\frac{3x-15}{2}=9+4x$ .

**10** احسبِ المُتغيِّر $b$ بدلالة المتغيِّرات الأخرى في القاعدة

$$x=\frac{ab-1780}{q}$$

**11** حُلَّ المعادلة:

$$\frac{3x-2.5}{5}-123=5.6(2.1x-12.4)+3.26$$

**12** حُلَّ المُتباينة $-x+4\leq 2(1-2x)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**13** أي من الأعداد أدناه ليس حلاً للمُتباينة $5x-6(x+9)<1$ ؟

أ $15$    ب $-35$

ج $18.25$    د $-55$

**14** ما قيمة المقدار $27^{\frac{2}{3}}$ ؟

أ $3.5$    ب $3$

ج $9$    د $6$

**احسبْ قيمة المقدار، في التمارين من 15 إلى 17.**

**15** $75-\frac{3(4+12\div 2)^2}{3+2}$

**16** $\frac{6^2\times 6^{-3}}{6^{-1}}$

**17** $[3(1+2)+3]2^2$

**18** بسِّط المقدار $\left(\frac{2x^{-2}y^3}{x^2y^{-3}}\right)^{-1}$

**حُلَّ نظام المعادلتَيْن بالتعويض ثم بالحذف، في التمرينَيْن 19 و20.**

**19** $\begin{cases}11x+4y=-17\\ -6x+y=22\end{cases}$

**20** $\begin{cases}1.5x+2y=9.5\\ 2.25x-0.5y=5.5\end{cases}$

**21** هل لنظام المعادلتَيْن $\begin{cases}2x-3y=11\\ 6x-9y=22\end{cases}$ حلول؟

**22** حُلَّ بالتعويض نظام المعادلتين $\begin{cases}3x-3y=1\\ x+y=4\end{cases}$

**في التمارين من 23 إلى 26، اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

**23** $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(-1+\sqrt{3}\right)$

**24** $\left(3\sqrt{5}+2\right)-\left(3+2\sqrt{20}\right)$

**25** $\frac{2}{\sqrt{15}}$

**26** $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

# الفصل الثاني

# الـــدوالّ




# الـــــدوالّ Functions

تُستعمل الدوالّ في مسائل الحياة اليومية عبر استعمال الكميّات في التعبير عن التغيّرات وعن علاقة بين متغيِّرين. مثال على ذلك: يمكن تمثيل العلاقة بين سرعة دوران القطار في أفعوانيّة والقوة التي تثبِّت الركاب في مقاعدهم بواسطة دالّة.

الدروس



غالبًا ما تكون مسائل الحياة اليومية معقَّدة أو تكون بعض العوامل التي تحكمها غير معروفة. لهذا السبب يستعمل الإنسان النماذج الرياضية لتمثيل هذه المسائل وتقدير حلولها المحتملة.

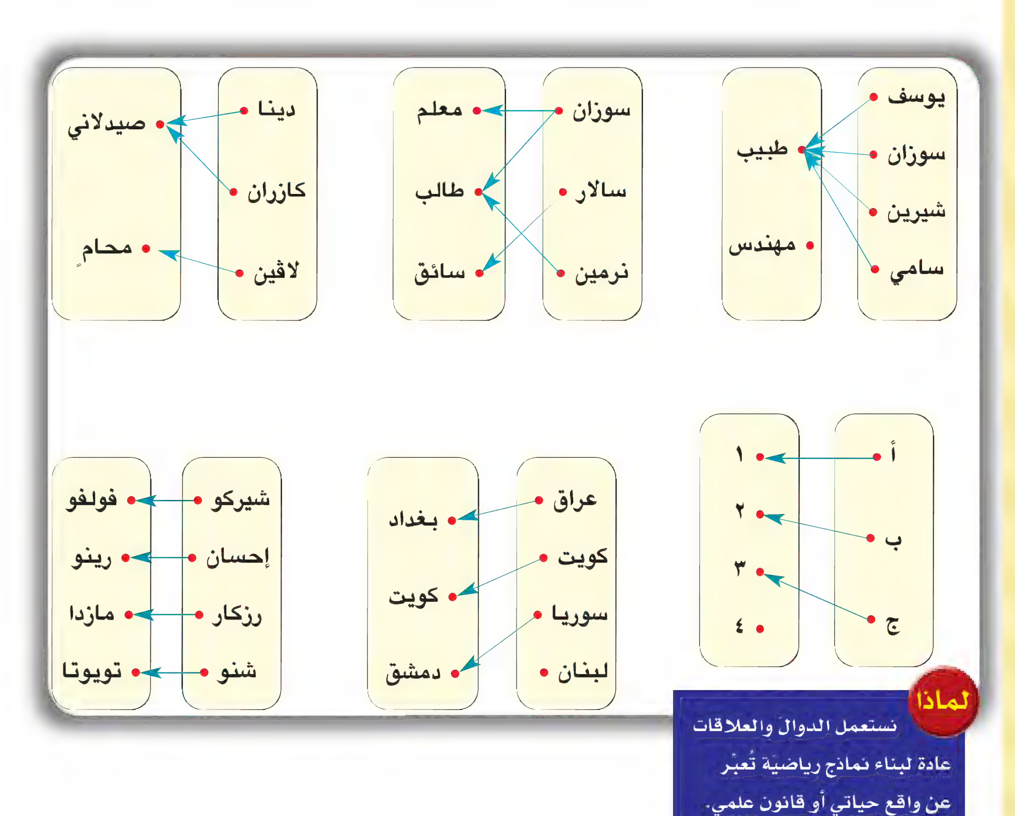
سوف تقوم، خلال عملك على مشروع الفصل، باستعمال الدوال لإيجاد نماذج رياضية مرتبطة بتزايد كمّية النفايات الفضائية التي تدور حول الأرض.

بعد انتهائك من مشروع الفصل، سوف تصبح قادرًا على:

- استعمال جدول لتمثيل العلاقة بين الزمن (بالسنين) وكمّية النفايات الفضائية، وتحديد دالّة مناسبة تشكّل نموذجًا رياضيًّا لهذه العلاقة.
- إيجاد نماذج لدراسة تجمُّع مختلف أنواع النفايات الفضائيّة ومناقشتها.
- تحديد نوع من الدوالّ لدراسة العلاقة بين الارتفاع وكمّية النفايات الفضائيّة عند هذا الارتفاع.




# الـــــدوالّ Functions




**الأهداف**

- يمثِّل بيانيًّا علاقة بين متغيِّرين.
- يحدِّد مجال العلاقة ومداها.
- يقرِّر إن كانت العلاقة تشكِّل دالّة.
- يحسب قيمة دالّة عندما يأخذ المتغيِّر قيمة معيَّنة.

**لماذا**

نستعمل الدوالّ والعلاقات عادة لبناء نماذج رياضية تُعبِّر عن واقع حياتي أو قانون علمي.

## النشاط

### العلاقات والدوالّ Relations and Functions

1. فتح سليم دفتر الهاتف ووجد فيه:



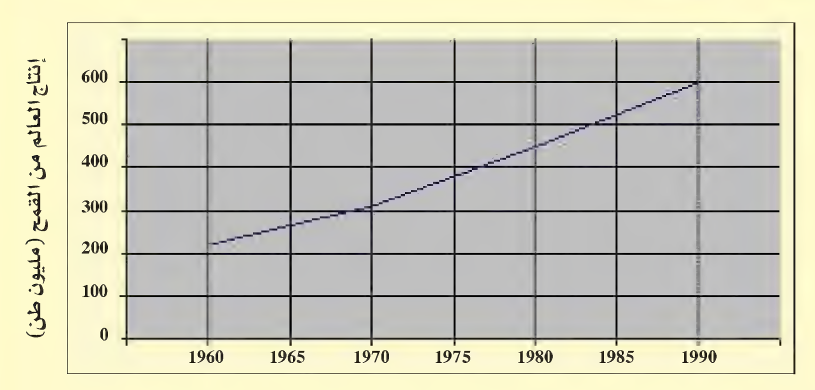
| الاسم | رقم الهاتف |
|---|---|
| شكري دهوكي | 235 246 |
| هيوا سليمان | 456 987 |
| خسرو هوليري | 852 369 |
| خسرو هوليري | 369 852 |
| ڤيان كركوكي | 741 236 |

ما رقم هاتف ڤيان كركوكي؟ ما رقم هاتف خسرو هوليري؟

2. استعمل الحاسبة لإكمال الجدول التالي الذي يعطيك مساحة الدائرة بدلالة قيَم مختلفة لنصف قطرها، ثم أوضح كيف أكملت الجدول.

| نصف القطر | 1 | 1.5 | 4 | 0.5 | 0.75 | 3 | 0 | 2.5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المساحة | 3.14 | | | | | | | | |

3. يوضِّح الرسم البياني أدناه تطوّر الإنتاج العالمي للقمح في النصف الثاني من القرن العشرين محسوبًا بملايين الأطنان.




استخدم الرسم البياني لتقدير الإنتاج العالمي للقمح بغية إكمال الجدول التالي:

| السنة | 1960 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| كمية إنتاج القمح | | | | | | | |

4. يبيِّن الجدول التالي معدَّل درجات الحرارة في دبي خلال الأسبوع الأول من شهر يناير:

| أيام الأسبوع | السبت | الأحد | الاثنين | الثلاثاء | الأربعاء | الخميس | الجمعة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| معدَّل الحرارة | 26 | 24 | 23 | 20 | 22 | 24 | 26 |



كم كان معدّل الحرارة يوم الأحد؟ كم كان معدّل الحرارة يوم الأربعاء؟ يوم الخميس؟

إذا تفحَّصت الأمثلة الأربعة السابقة تلاحظ أن كلاًّ منها يتضمّن متغيِّرين، وأن قيَم أحد هذين المتغيّرين تحدِّد قيَم الآخر.

**نقطة مراقبة √** 5. أكمل الجدول التالي محدِّدًا في كل مثال المتغيِّر الأوَّل الذي تحدِّد قيَمه قيم المتغيِّر الثاني:

| المثال | المتغيِّر الأول | المتغيِّر الثاني |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

تتحدّث عن وجود **علاقة Relation** بين متغيِّرين $x$ و $y$ إذا كانت قيم أحدهما، $x$ مثلاً، تحدِّد قيم الآخر، $y$. في هذه الحالة، تقول إن المتغيِّر الأول هو **المتغيِّر الحرَ Variable Independent** وأن الثاني هو **المتغيِّر التابع Dependent Variable**.

## الدوالّ (تعريف الدالة) Functions

في المثال الأول، تتردَّد في الإجابة عن السؤال: **ما رقم هاتف خسرو هوليري؟** لأن المتغيِّر الحر، **الاسم**، تقابله قيمتان للمتغيِّر التابع. أما في الأمثلة الأخرى، فإنك لا تواجه فيها هذه المشكلة لأن كل قيمة من قيَم المتغيِّر الحر تقابلها قيمة وحيدة من قيَم المتغيِّر التابع.

تقول عن العلاقة بين المتغيِّرين $x$ و $y$ أنها **دالّة Function** إذا قابلت كل قيمة $a$ من قيَم المتغيِّر $x$ قيمة وحيدة $b$ من قيَم المتغيِّر $y$. هذه القيمة الوحيدة $b$ تُدعى **صورة Image** $a$ الدالّة. يُدعى المتغيِّر الأول **المتغيِّر الحرّ** والثاني **المتغيِّر التابع**.

**نقطة مراقبة √** ادرس من جديد الأمثلة الأربعة، وحدِّد في كل حالة إن كانت **العلاقة دالّة** أم لا، وعلِّل جوابك.

### مثـــــال 1

**هل تمثِّل معطيات الجدول دالّة؟ أوضح ذلك.**

أ)

| قيَم المتغيِّر الحرّ | قيَم المتغيِّر التابع |
|---|---|
| 1 | −3.6 |
| 2 | −3.6 |
| 3 | 4.2 |
| 4 | 4.2 |
| 5 | 10.7 |
| 6 | 12.1 |
| 2 | 52 |

ب)

| قيَم المتغيِّر الحرّ | قيَم المتغيِّر التابع |
|---|---|
| 3 | 7 |
| 3 | 8 |
| 3 | 10 |
| 4 | 42 |
| 10 | 34 |
| 11 | 18 |
| 52 | 52 |

**الحــل**

أ) تمثِّل معطيات الجدول الأول دالّة، فكل قيمة من قيَم المتغيِّر الحرّ تقابلها قيمة وحيدة من قيَم المتغيِّر التابع.

ب) لا تمثِّل معطيات الجدول الثاني دالّة، لأن القيمة 3 للمتغيِّر الحرّ تقابلها ثلاث قيم للمتغيّر $y$ هي 7 و8 و10. أي أنّ الجدول (ب) يمثِّل علاقة فقط.

## أشكال تعريف الدالّة Different Ways to define a function

إذا نظرت إلى الأمثلة السابقة تلاحظ أن هناك عدة أشكال لتعريف الدالّة. يمكن تعريف الدالّة بواسطة:

**1. جدول قيَم Table of Values** تُعرَّف الدالّة في هذه الحالة بواسطة جدول من عمودين يحتوي الأول منهما على قيَم المتغيِّر الحرّ، والآخر على قيَم المتغيِّر التابع المقابلة لها، بحيث تُكتب قيمة المتغيِّر الحرّ وقيمة المتغيّر التابع المقابلة على الصف نفسه.

**مثال:** دالّة المثال 1.

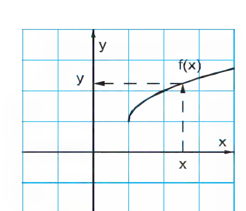
لا تكون العلاقة المُعرّفة بواسطة جدول، دالّة، إذا احتوى عمود المتغيِّر الحر على قيمة تُقابلها قيمتان مختلفتان للمتغيِّر التابع.

من هنا فإن العلاقة المُعرّفة بواسطة جدول والواردة في المثال الأول ليست دالّة، لأن هناك قيمة للمتغيِّر الحرّ (خسرو هوليري) تقابلها قيمتان مختلفتان للمتغيِّر التابع (رقم الهاتف).

2. **قاعدة Rule**: تُعرَّف الدالّة بواسطة قاعدة أو قانون يعبِّر عن قيمة المتغيِّر التابع بدلالة المتغيِّر الحرّ.

**مثال**: دالّة المثال الثاني حيث يتم التعبير عن قيمة المتغيِّر التابع $A$ (مساحة الدائرة) بدلالة المتغيِّر الحرّ $r$ (نصف القطر). هذه القاعدة هي $A(r)=\pi r^2$ .

3. **رسم بياني أو بيان Graph**: تُعرّف الدالّة بواسطة رسم بياني أو بيان، بحيث تكون قيَم المتغيِّر الحرّ على المحور الأول وقيَم المتغيِّر التابع على المحور $y$. يتمّ تحديد قيمة المتغيِّر التابع المقابلة للقيمة $x$ من قيَم المتغيِّر الحرّ بأنها الإحداثيّ الثاني للنقطة الموجودة على الرسم البياني، والتي إحداثيّها الأول $x$.



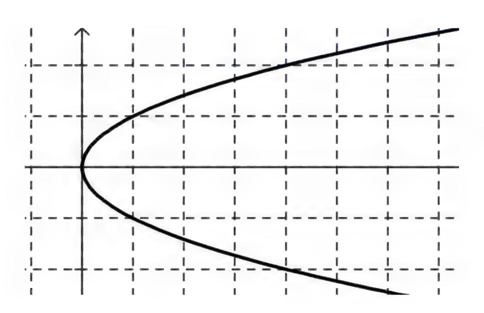

**مثال**: دالّة المثال المقابل.

### اختبار المستقيم العمودي Vertical Line Test

إذا قطع مستقيم عموديّ رسمًا بيانيًّا في أكثر من نقطة، فإن هذا الرسم البيانيّ لا يمثِّل دالّة.

**مثـــال** 2

**هل العلاقة المُعرَّفة بواسطة الرسم البياني المقابل دالّة؟**



**الحــل**

ليست العلاقة المعرَّفة بالرسم البياني المقابل دالة لأن كل قيمة موجبة $x$ تقابلها قيمتان للمتغيِّر التابع $y$، كما يبيِّن ذلك المستقيم العمودي الذي يقطع الرسم البياني في نقطتين مختلفتين.

## دراسة الدوالّ Studying Functions

لكي تدرّس دالّة ما، $f(x)$، عليك أن تقوم بما يلي:

1. تحديد مجموعة الأعداد الحقيقية للمتغيِّر الحرّ $x$ التي يمكن حساب صورتها $y=f(x)$. تُدعى هذه المجموعة **مجال تعريف الدالّة** أو باختصار **مجال الدالّة Domain**.
2. تحديد مجموعة الأعداد الحقيقية التي يغطّيها المتغيِّر التابع، وتُدعى **مدى الدالّة Range**.
3. تمثيل الدالة بيانيًّا. وهذا يعني تمثيل جميع الأزواج المرّتبة $(x,y)$ حيث ينتمي $x$ إلى مجال الدالّة وحيث $y=f(x)$ . تُدعى مجموعة النقاط هذه **الخط البياني** للدالّة أو **بيان الدالّة Graph**.
4. استخلاص خواص الدالّة عبر دراسة بيانها.

**كيف تُنشئ بيان الدالّة؟**

إذا كانت الدالّة مُعرَّفة بواسطة جدول قيم، مثِّلْ جميع النقاط $(x,y)$ الواردة في الجدول، ثم صِلْ بين هذه النقاط بخط مناسب.

إذا كانت الدالّة مُعرَّفة بقاعدة، أنشئ جدول قيَم للدالة ومثِّل نقاطه ثم أنشئ البيان بالطريقة السابقة. كما يمكنك استعمال حاسبة بيانيّة أو حاسوب لإنشاء بيان الدالّة.

تحــــــدٍّ

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

1 أوضح الفرق بين الدالّة والعلاقة. أعطِ مثالاً على رسم بياني لعلاقة ليست دالّة.

2 اشرح ثلاث طرق لتعريف الدالّة.

3 أوضح كيف تحدِّد مجال الدالّة المُعرَّفة بالخط البياني المقابل، وكيف تُحدِّد مداها.



## تمارين موجَّهة

**هل يُعرِّف الجدول دالّة؟ أوضح ذلك.**

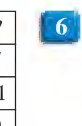
4

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 5 | 3 |
| 8 | 4 |
| 5 | 7 |
| 9 | 2 |

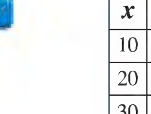
5

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 8 |
| 2 | 8 |
| 3 | −7 |





| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | 7 |
| 20 | 11 |
| 30 | 9 |
| 40 | 7 |



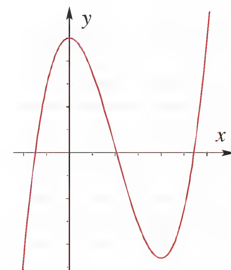
7

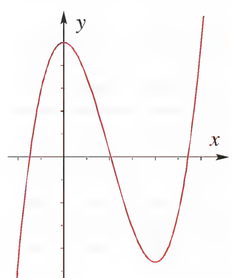
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 3 | 9 |
| 2 | 2 |
| 8 | −3 |
| 2 | 1 |



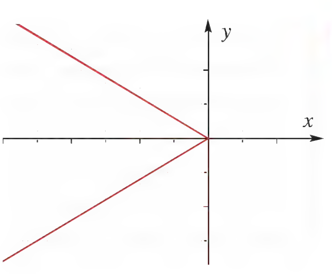
**حدِّد إن كان الرسم البياني يمثِّل دالّة أم لا، وعلِّل جوابك.**

8






9

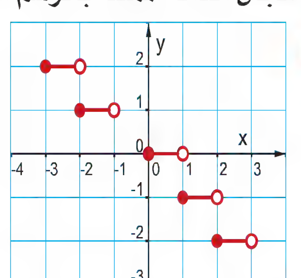


تطبيـــقات

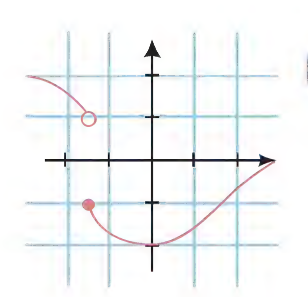
**10** **سيّارات** يمثِّل المتغيِّر $A$ السيّارات المرخَّص لها بالسير في مدينتك. ويمثِّل المتغيِّر $N$ اللوحات الرقمية لهذه السيارات. هل هناك علاقة بين $A$ وَ $N$؟ إذا كان الجواب «نعم»، فهل هي دالّة؟ أيّ المتغيِّرين هو المتغيِّر الحرّ وأيُّهما المتغيِّر التابع؟ علِّل جوابك؟

**حدّد مجال الدالّة الممثَّلة بالرسم البياني ومداها.**

**11**




**12**



**13** احسب قيمة الدالّة $f(x)=x^2+2x-1$ عندما $x=3$ ، وعندما $x=1.5$ .

تطبيـــقات

**14** **مدخول** يتقاضى سبّاك 24 ألف دينار عن كل ساعة عمل، بالإضافة إلى 20 ألف دينار للكشف عن الأعطال.

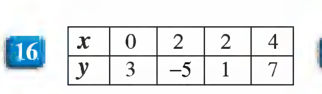
أ اكتب دالَّة تمثِّل دخل السبّاك $R$ بدلالة عدد ساعات العمل $x$.

ب احسب دخل السبّاك إذا عمل 5.5 ساعات.

## تمارين وتطبيقات

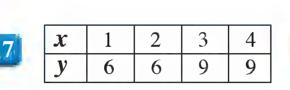
هل يُعرِّف الجدول دالّة؟ أوضح ذلك.

**15**



| $x$ | 0 | 2 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | −5 | 1 | 7 |

**16**



| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 6 | 9 | 9 |

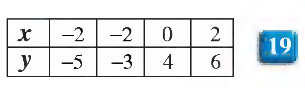
**17**

| $x$ | 4 | 4 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −2 | 2 | −3 | 3 |

**18**

| $x$ | −5 | −3 | −1 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 8 | −2 | −2 |

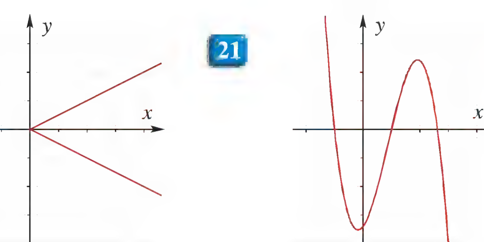
**19**



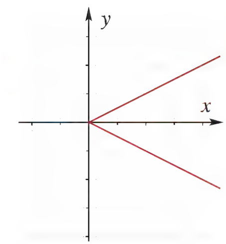
| $x$ | −2 | −2 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −5 | −3 | 4 | 6 |

**هل يمثِّل الرسم البياني دالّة؟ أوضح ذلك.**

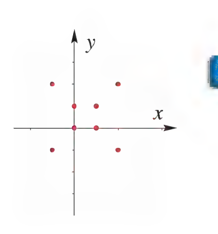
**20**



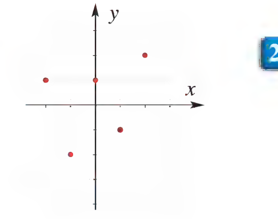

**21**



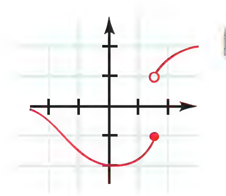

**22**



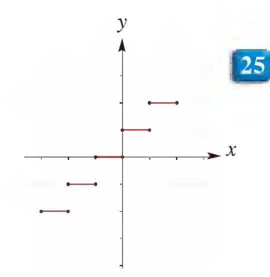

**23**




**24**



**25**



**احسب قيمة الدالّة بالتعويض.**

26. $f(x)=2x-6$ عندما $x=1$ وعندما $x=3$ .
27. $f(x)=5-3x$ عندما $x=1$ وعندما $x=3$ .
28. $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ عندما $x=-9$ وعندما $x=1$ .
29. $f(x)=\frac{x-4}{5}$ عندما $x=-9$ وعندما $x=9$ .
30. $f(x)=2x^2-3x$ عندما $x=3$ وعندما $x=-2.5$ .
31. $f(x)=x^2+4x-1$ عندما $x=2$ وعندما $x=1.5$ .
32. $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ عندما $x=-1$ وعندما $x=\frac{3}{4}$ .
33. $f(x)=-4x^2$ عندما $x=\frac{3}{2}$ وعندما $x=-2$ .

**أنشئ بيان الدالّة باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم حدّد مجالها ومداها.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 34. $y=-\frac{x}{2}$ | 35. $y=-\frac{2}{3}x-5$ | 36. $y=-2x^2$ | 37. $y=\left(\frac{x}{y}\right)^2$ |
| 38. $y=2$ | 39. $y=-6$ | 40. $y=x^2$ | 41. $y=x^2+2$ |

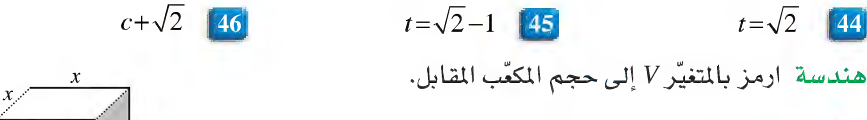
42. أنشئ الخط البياني لدالّة يكون مجالها $-3\le x\le 3$ ومداها $-5\le y\le 5$ .
43. أنشئ الخط البياني لدالّة يكون مجالها $-2\le x\le 5$ ومداها $0\le y\le 4$ .

**تحدٍّ**

**احسب قيمة الدالّة $f(x)=t^2-3$ في كل حالة.**

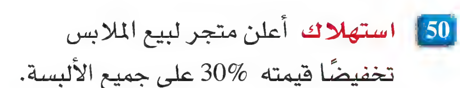


44. $t=\sqrt{2}$
45. $t=\sqrt{2}-1$
46. $c+\sqrt{2}$



**هندسة** ارمز بالمتغيّر $V$ إلى حجم المكعّب المقابل.

47. اكتب الدالّة التي تعطيك حجم المكعب $V$ بدلالة طول ضلعه $x$ .
48. احسب مساحة وجه من وجوه المكعّب عندما يكون حجمه $27\text{m}^3$ .
49. **استهلاك** تنخفض قيمة الحواسيب بسرعة هائلة. اعتبرت مؤسسة أن قيمة الحاسوب تنخفض كل سنة بمعدَّل 15% من سعره الأصلي.
   أ) اكتب دالّة تعطي قيمة الحاسوب بدلالة عمره بالسنين، علمًا بأن المؤسَّسة دفعت ثمنه 3 200 دينار.
   ب) ما سعر الحاسوب بعد ثلاث سنوات؟



50. **استهلاك** أعلن متجر لبيع الملابس تخفيضًا قيمته 30% على جميع الألبسة.
   أ) دفع دانا 47.25 ألف دينار ثمنًا لقميص في موسم التخفيضات. ما السعر القديم للقميص؟
   ب) اشترى زانا بنطالاً ثمنه 52 ألف دينار قبل موسم التخفيضات. ما ثمنه الجديد؟



## نظرة إلى الوراء

**اكتب معادلة المستقيم على الصورة $y=mx+b$ ، بمعرفة ميله $m$ ونقطة $A$ يمر بها.**

51 $m=5$ ؛ $A(2, 3)$

52 $m=-3$ ؛ $A(4, 1)$

53 $m=\frac{1}{5}$ ؛ $A(4, -1)$

54 $m=-\frac{2}{3}$ ؛ $A(-8, -3)$

**اكتب معادلة المستقيم على الصورة $y=mx+b$ ، بمعرفة نقطتين يمرّ بهما.**

55 $(1, 4); (-3, 0)$

56 $(0, 2); (-1, 1)$

57 $(2, 3); (0, 0)$

58 $(-2, -5); (5, -1)$

59 احسب المقدار $3[2-(5-3)-7]\div 2$ باستعمال تراتب العمليات.



## نظرة إلى الأمام

60 أنشئ الرسم البياني للعلاقة $y=x^2-2x-10$ بين $x$ وَ $y$. أوضح لماذا تمثّل هذه العلاقة دالّة. حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.




# الدوالّ الخطّية Linear Functions

**الأهداف**

- يتعرّف الدالّة الخطّية.
- يستعمل الدالّة الخطّية لبناء نماذج رياضيّة.
- يحدِّد مجال الدالّة الخطّية ومداها، ويحدِّد تقاطعاتها مع محورَي الإحداثيات.

**تطبيقات**
**فيزياء**



**لماذا**
الدالّة الخطّية هي الأبسط بين الدوال الجبرية. كما أنها تُستعمل كثيرًا في بناء نماذج رياضية لأوضاع في الحياة اليومية.

## النشاط

### استكشاف الدالّة الخطّية Exploring linear function

تعرف أن درجة غليان الماء هي 100 درجة مئوية. لكنك قد تجهل أن 100 درجة مئوية هي درجة غليان الماء في مكان يقع عند مستوى البحر (أي إن ارتفاعه عن سطح البحر صفر). تتغيَّر درجة غليان الماء بتغيُّر ارتفاع المكان عن سطح البحر. فهذه الدرجة في جبال الهملايا تقل عن 100 درجة مئوية، بينما تزيد على 100 درجة مئوية في البحر الميت.

يُبيّن الجدول التالي مواقع في العالم وارتفاع كل منها، عن سطح البحر، ودرجة غليان الماء فيه.

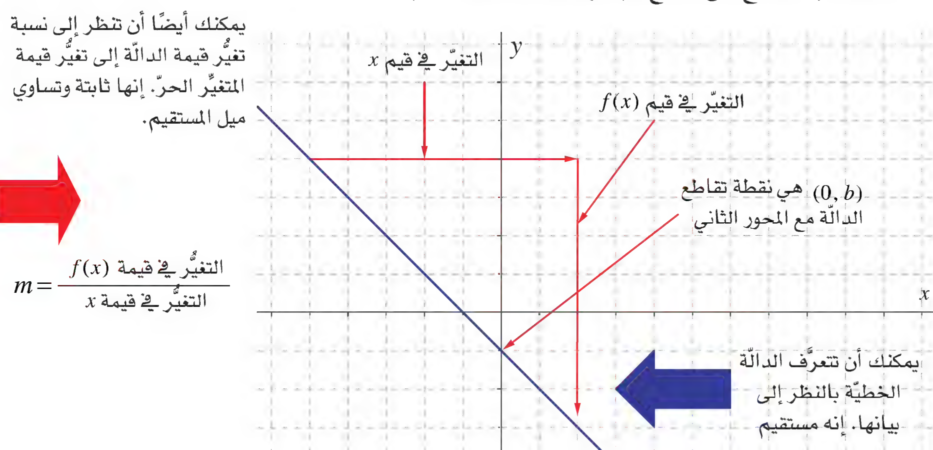
| الموقع | الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار | درجة غليان الماء |
|---|---|---|
| جدّة | 0 | 100 |
| فريبورغ (سويسرا) | 586 | 99.68 |
| صوفر (لبنان) | 1 250 | 99.135 |
| كولورادو سبرنغز (أمريكا) | 1 832 | 98.995 |
| القرنة السوداء (لبنان) | 3 220 | 98.23 |
| البحر الميت | −420 | 100.23 |

1. مثِّل معطيات الجدول في المستوي الإحداثي محمِّلاً المحور الأول قيَم الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار، والمحور الثاني درجات الحرارة على المقياس المئوي.
2. صل بين النقاط بقطع مستقيمة. ماذا تلاحظ؟
3. هل العلاقة بين الارتفاع عن سطح البحر ودرجة غليان الماء دالّة؟ أوضح ذلك.
4. استعمل الرسم البياني الذي حصلت عليه، لتقدير درجة غليان الماء على ارتفاع 3000m عن سطح البحر.
5. استعمل الرسم البياني الذي حصلت عليه، لتقدير ارتفاع مكان عن سطح البحر، علمًا بأن درجة غليان الماء فيه 97 درجة.
6. أين يقطع بيان الدالّة المحور الثاني؟ ماذا تمثِّل هذه النقطة؟

## الدالّة الخطّية Linear Function

**الدالّة الخطّية** هي دالّة بيانها عبارة عن خطّ مستقيم.
تُكتب قاعدة الدالّة الخطّية على الشكل التالي: $f(x)=mx+b$

يمكنك استعمال الدوالّ الخطّية لبناء نموذج رياضي لبعض العلاقات بين متغيّرين مثل العلاقة السابقة (الارتفاع عن سطح البحر ودرجة غليان الماء).

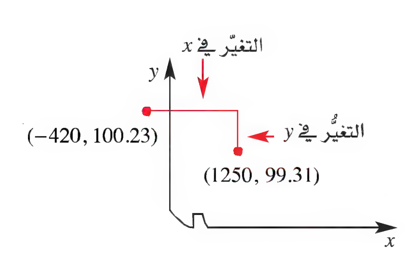



تبقى نسبة تغيُّر قيمة الدالّة الخطّية $f(x)$ إلى تغيُّر قيمة $x$ ثابتة، وتُدعى هذه النسبة **ميل Slope** الدالّة الخطّية ويرمز لها عادة بالحرف $m$.

### مثـــال 1

أ استعمل معطيات الجدول في الصفحة السابقة لتشرح كيف تتغيَّر درجة غليان الماء عندما يتغيّر الارتفاع عن سطح البحر.

ب اكتب قاعدة لدالّة درجة غليان الماء بدلالة الارتفاع عن سطح البحر.




#### الحــل

أ استعمل $x$ للدلالة على الارتفاع (بالأمتار) عن سطح البحر وَ $y$ للدلالة على درجة غليان الماء بالمقياس المئوي. استعمل قيمتين للمتغيِّر الحر $x$ وقيمتَي الدالّة المقابلتين لهما. مثلاً ارتفاع صوفر في لبنان والبحر الميت في الأردن. احسب نسبة تغيّر درجة غليان الماء إلى تغيّر الارتفاع عن سطح البحر للحصول على الميل.

$$m=\frac{\text{تغيُّر الدالّة}}{x \text{ تغيُّر}}=\frac{99.31-100.23}{1250-(-420)}=0.00055$$

هذا يعني أن زيادة متر واحد في الارتفاع عن سطح البحر تؤدّي إلى تغيُّر في درجة غليان الماء مقداره $-0.00055$ درجة.

ب الارتفاع × $m$ + درجة غليان الماء عند سطح البحر = درجة غليان الماء

$f(x) \quad = \quad 100 \quad +(-0.00055)x$

قاعدة الدالّة إذًا، $f(x)=100-0.00055x$

**تفكير ناقد** هل تزيد درجة غليان الماء إذا زاد الارتفاع عن سطح البحر أم تنقص؟ أوضح كيف تستعمل الجدول في أول الدرس للإجابة عن هذا السؤال. أوضح كيف تستعمل بيان الدالّة $f(x)=100-0.00055x$ للإجابة عن السؤال.

**تحدٍّ** وجدت ليلى قاعدة الدالة الخطية كما هو مبين في المقابل.
اشرح طريقة ليلى.
استعمل موقعين آخرين في الجدول لإيجاد قاعدة الدالة.
هل تحصل على القاعدة نفسها؟

$m=-0.00055$
$f(x)=mx+b$
$100=-0.00055(0)+b$
$100=b$
إذًا، قاعدة الدالّة هي:
$f(x)=-0.00055x+100$

**مثال** 2 احسب $f(9)$ حيث $f(x)=\frac{1}{3}x+17$ . ما قيمة $x$ إذا كان $f(x)=-1$ ؟

**الحل**

عوّض عن $x$ بالقيمة 9.

$$f(9)=\frac{1}{3}\times 9+17$$
$$=3+17$$
$$=20$$

عوّض عن $f(x)$ بالقيمة $-1$ وحُلّ

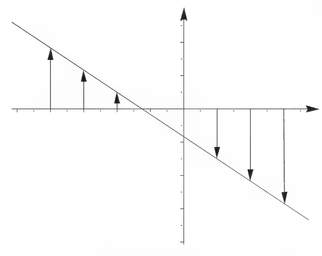
$$f(x)=\frac{1}{3}x+17$$
$$-1=\frac{1}{3}x+17$$
$$-18=\frac{1}{3}x$$
$$-54=x$$

**تحدٍّ** أوضح كيف تستعمل دالّة المثال 1 لكي تحدّد درجة غليان الماء في موقع يرتفع 8000m عن سطح البحر. حدِّد هذه الدرجة.

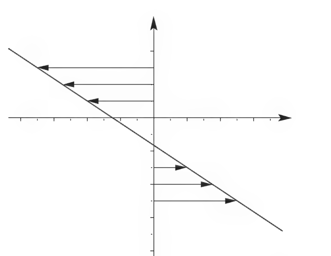
**تحدٍّ** أوضح كيف تستعمل دالّة المثال 1 لكي تحدّد ارتفاع موقع عن سطح البحر تبلغ درجة غليان الماء فيه 85 درجة مئوية. حدِّد هذا الارتفاع.

## دراسة الدالّة الخطّية Studying linear function

تسمح قاعدة الدالّة الخطّية $f(x)=mx+b$ بحساب قيمة الدالّة أيًّا تكن قيمة المتغيِّر $x$. ينتج من ذلك أن $f(x)$ معرّفة أيًّا كانت قيمة $x$، وأن مجالها، بالتالي، هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة. من ناحية أخرى، يمكن لكل عدد حقيقي أن يكون قيمة للدالّة الخطّية، لأنك تستطيع حساب قيمة المتغيِّر $x$، إذا عرفت قيمة الدالّة. ينتج من ذلك أن مدى الدالّة الخطّية هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة.



يُظهر بيان الدالة الخطّية أن مجالها يغطّي المحور الأول بكامله.



يُظهر بيان الدالّة الخطّية أن مداها يغطّي المحور الثاني بكامله.

عندما تمثّل الدالّة حالة من الحياة اليومية، فمن شأن ذلك أن يحدّ من مجالها ومن مداها.

**مثـــــال**

3 تعتبر قمة إيفرست الواقعة في جبال الهملايا، والتي ترتفع 8848m عن سطح البحر، أعلى موقع على وجه الأرض. كما يُعتبر البحر الميت، والذي ينخفض 420m عن سطح البحر، أدنى موقع برّي على وجه الأرض. استعمل المعلومتين السابقتين لتحدِّد بدقّة مجال دالّة المثال 1 ومداها.

**الحــل**

تشكِّل دالّة المثال 1 نموذجًا رياضيًّا لحالة من الواقع. ينتج من ذلك أن المتغيِّر الحرّ $x$ محدَّد بقيمٍ معيَّنة. فهو، بالاستناد إلى المعلومتين السابقتين، يتّخذ القيَم التي تقع بين $-420$ وَ 8848 لذا، فإن مجال دالة المثال الأول هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقِّق المتباينة $-420 \leq x \leq 8848$ .
لكي نحدِّد مدى هذه الحالة، نلاحظ أن قيمتها تتناقص كلما ازدادت قيمة $x$. هذا يعني أن أعلى قيمة لها تقابل أدنى قيمة للمتغيِّر الحرّ، أي: $f(-420)=100.23$ وأن أدنى قيمة لها تقابل أعلى قيمة للمتغيِّر $x$ أي $f(8848)=95.13$ . هكذا، فإن مدى دالّة المثال الأول هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقّق $95.13 \leq y \leq 100.23$ .

# التمارين

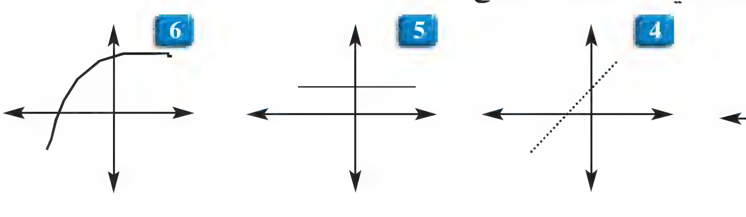
## التواصل في الرياضيات

1 كيف تتحقّق من أن نقطة تعرف إحداثيَّيها تقع على مستقيم تعرف معادلته؟

2 أوضح كيف تجد قاعدة دالّة خطيّة بمعرفة بيانها.

**هل يُمثِّل الرسم البياني دالّة خطّية؟ أوضح ذلك.**

3 4 5 6



## تمارين موجّهة

**هل الدالّة خطّية؟ أوضح ذلك.**

7 $f(x)=2-x^2$ 8 $f(x)=-3x-6$ 9 $g(x)=4+10x$

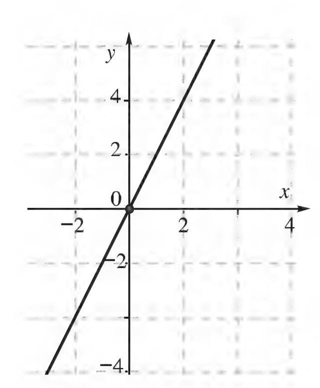
10 $f(x)=x^3-x$ 11 $f(x)=\frac{3}{2}x+4$ 12 $g(x)=\frac{1}{x}$

**تطبيقات** رياضيات المستهلك

13 يبيِّن الجدول أدناه كلفة مخابرات الهاتف الدولية، بما فيها الرسم الثابت وقيمته ألفا دينار عن كل دقيقة.

| عدد الدقائق | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الكلفة بالألف دينار | 2.50 | 3.00 | 3.50 | 4.00 | 4.50 | 5.00 |

استعمل الجدول لكي تكتب دالّة. حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.



**14** يُظهر الشكل المقابل بيان دالّة خطّية.
أنشئ جدول قيَم لها، واكتب قاعدتها.

**أكمل الزوج المرتَّب بحيث تقع النقطة على المستقيم $y=-4x+21$ .**

**15** $(5, ?)$ **16** $(?, 9)$

**17** $(0, ?)$ **18** $(?, 0)$

## تمارين وتطبيقات

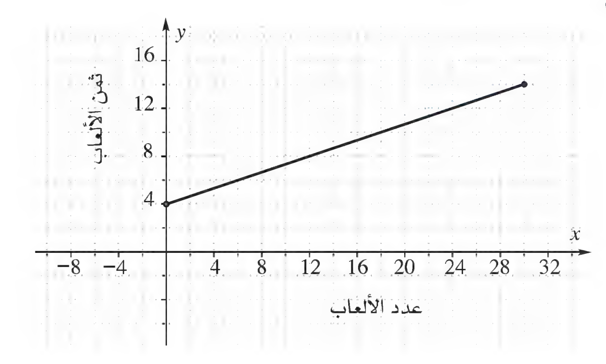
أكمل الزوج المرتَّب بحيث تقع النقطة على المستقيم $y=2x-14$ .

**19** $(8, ?)$ **20** $(10, ?)$ **21** $(0, ?)$ **22** $(?, 0)$

**23** $(5, ?)$ **24** $(-5, ?)$ **25** $(3, ?)$ **26** $(?, 3)$

**27** $(?, 6)$ **28** $(?, -4)$ **29** $(?, -7)$ **30** $(?, 10)$

**31** **هندسة إحداثية** يبيِّن الرسم البياني العلاقة بين عدد الألعاب الإلكترونية (بين 0 وَ30) وثمنها. أنشئ جدول قيم لهذه الدالّة، واكتب قاعدتها.




**32** **سيّارات** عندما تملأ خزان الوقود لسيارتك، فإن كمية الوقود في الخزان تشكّل دالّة متغيِّرها الحرّ هو عدد الدقائق. افترض أن الوقود الذي يصب في الخزان يتم بمعدَّل 18 لترًا في الدقيقة وأن سعة الخزّان تبلغ 35 لترًا.

**أ** اكتب قاعدة دالّة تمثِّل كمّية الوقود التي تصبّ في الخزان بدلالة الزمن.

**ب** حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.

**33** **تسلية** يبيع نادي الشباب أقراصًا مدمجة كما هو مبيَّن في الجدول التالي، بما فيها رسم الانتساب للنادي والبالغ 25 ألف دينار.

| عدد الأقراص | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الكلفة | 25 | 45 | 65 | 85 | 105 | 125 | 145 | 165 |

اكتب دالّة تمثِّل هذا الأمر.

**34** **تسلية** يبيع نادي الحياة أقراصًا مدمجة كما هو مبيَّن في الجدول التالي بما فيها رسم الانتساب للنادي والبالغ 35 الف دينار.

| عدد الأقراص | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الكلفة | 35 | 51 | 67 | 83 | 99 | 115 | 131 | 147 |

اكتب دالّة تمثّل الأمر.




**35** **تكنولوجيا** استعمل حاسبة بيانيّة لرسم بياني دالتي التمرينين السابقين في المستوى الإحداثي نفسه. قارن بين العرضين. أي نادٍ يقدِّم العرض الأفضل؟ أوضح ذلك.




**أنشئ جدول قيَم لكلّ دالّة بالتعويض عن $x$ بالقيم 1، 2، 3، 4، 5، 10. وارسم بيانها.**

**36** $y=2x+1$     **37** $y=5x-1$

**احسب ذهنيًا القيمة العدديّة لكل مقدار.**

**38** $300-196$     **39** $10\times30$     **40** $\frac{480}{16}$     **41** $1\,000\times1\,000$

## نظرة إلى الأمام



| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 |

**42** ادرس الجدول أعلاه. هل يمثّل دالّة خطّية؟

**43** اكتب قاعدة للعلاقة بين $x$ وَ $y$. مثّل معطيات الجدول بيانيًا وتحقّق من إجابتك السابقة.

الدرس 3

# الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

## Various forms of the equation of a line



**الأهداف**

- يتعرّف مختلف صور معادلة المستقيم.
- يكتب معادلة مستقيم على صورها المختلفة.

**لماذا**

تؤدي معادلة المستقيم دورًا مهمًا في الرياضيات. إنها تمثّل أبسط الدوال الجبرية. كما أنها تستعمل لبناء نماذج للكثير من مسائل الحياة.

### النشاط 1

**معادلة المستقيم . صورة الميل-التقاطع Slope-Intercept Form**

قصد نوزاد شركة لتأجير السيّارات. ذكر له موظّف الشركة أن عليه دفع 100 ألف دينار عند تسلُّم السيّارة وَ 1.5 ألف دينار عن كل كيلومتر يقطعه.

1. أكمل الجدول التالي:

| عدد الكيلومترات | 10 | 20 | 30 | |
|---|---|---|---|---|
| المتوجِّب دفعه | $1.5\times10+100$ | | | |

2. اكتب معادلة تمثِّل المبلغ $y$ المتوجِّب دفعه بدلالة عدد الكيلومترات $x$.
3. مثِّل هذه المعادلة بيانيًّا.



### صورة المَيل-التقاطع Slope - Intercept Form

معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع هي: $y=mx+b$ حيث يمثّل $m$ و $b$ عددين حقيقيين.
العدد $m$ هو **مَيل المستقيم Slope** و $b$ هو الإحداثيّ الثاني لنقطة تقاطع المستقيم مع المحور الثاني، أو **التقاطع الثاني y- intercept** للمستقيم.

**مثـــــــال**

**1** حدِّد ميل المستقيم وتقاطعه الثاني.

أ $y=3x-4$ ب $y=-5x+3$ ج $y=5$

**الحـــل**

أ المَيل 3 والتقاطع $(0, -4)$.

ب المَيل $-5$ والتقاطع $(0, -3)$.

ج المَيل 0 ونقطة التقاطع $(0, 5)$.

**حـــاول** ارسم المستقيم الذي يمثّل المعادلة $y=2x-8$ .

## النشاط 2

### صورة المَيل-النقطة Slope - Point Form

إذا عرفت ميل المستقيم $m$ ونقطة يمر بها $(h, k)$، فنستطيع أن تكتب معادلته.

1. معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع هي $y=ax+b$ . ما العلاقة بين الميل $m$ ومعامل $x$ في هذه المعادلة؟ كيف تكتب معادلة المستقيم للتعبير عن هذه العلاقة؟
2. اكتب أن المستقيم يمر بالنقطة $(h, k)$ بالتعويض عن $x$ بقيمته $h$ وعن ص بقيمته $k$.
3. حُلّ المعادلة واستنتج قيمة $b$ بدلالة $m$ و $h$ و $k$.
4. عوِّض عن $b$ بقيمتها، واكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-النقطة.

### صورة المَيل-النقطة Slope - Point Form

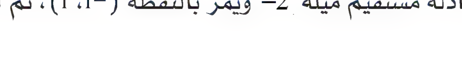
معادلة المستقيم على صورة المَيل-النقطة هي $y-y_1=m(x-x_1)$ حيث

- $m$ هو مَيل المستقيم.
- $(x_1, y_1)$ نقطة يمر بها المستقيم.



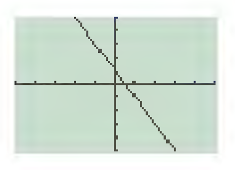
**مثـــــــال**

**2** اكتب معادلة مستقيم مَيله $-2$ ويمر بالنقطة (1، −1)، ثم ارسمه.



**الحـــل**

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$
$$y-(-1) = -2(x-1)$$
$$y+1 = -2x+2$$
$$y = -2x+1$$



**حـــاول** اكتب معادلة مستقيم مَيله 3 ويمر بالنقطة $(-2, -1)$ ، ثم ارسمه.

## النشاط 3

### صورة النقطتين Two Points Form

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(5, 3)$ وَ $(7, 4)$ .

1. احسب مَيل المستقيم.
2. اكتب معادلته على صورة المَيل–النقطة ثم على صورة المَيل–التقاطع.

**صورة النقطتين Two Points Form**

معادلة المستقيم المار في النقطتين $(x_1, y_1)$ وَ $(x_2, y_2)$ هي

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

**حــاولْ** اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(5, 65)$ وَ $(7, 71)$ على صورة المَيل–التقاطع.

**الصورة العامة Standard Form**

## النشاط 4

### الصورة العامة General Form

**تطبيــــقات**
**تسلية**

حدّدت إدارة حديقة الحيوانات رسم الدخول بعشرة آلاف دينار للكبار وخمسة آلاف دينار للصغار. بلغت حصيلة يوم الأربعاء 350 1 ألف دينار.

1. استعمل $x$ للدلالة على عدد الكبار وَ $y$ للدلالة على عدد الصغار. اكتب معادلة تعبِّر عن أن حصيلة يوم الأربعاء كانت 350 1 ألف دينار.
2. أكمل الجدول لإنشاء أزواج مرتَّبة تحقِّق المعادلة.
3. مثِّل بيانيًّا المعادلة التي حصلت عليها باستعمال الأزواج المرتبة. ما شكل الرسم البياني؟
4. تحقّق من جوابك بخصوص شكل الرسم البياني عن طريق حل المعادلة لكتابة $y$ بدلالة $x$.




| جدول قيَم | |
|---|---|
| y | $x$ |
| | 50 |
| 120 | |
| 70 | |
| | 120 |

**الصورة العامة General Form**

معادلة المستقيم على الصورة العامة هي $ax + by = c$ حيث:

- $a$ وَ $b$ وَ $c$ أعداد حقيقية.
- أحد العددين $a$ وَ $b$ على الأقل لا يساوي 0.

**مثـــــــال** 3 اكتب كل معادلة مستقيم على الصورة العامة:

أ $y = -2x + 3$ ب $x = -13y + 4$ ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$



**الحـل**

أ $y = -2x + 3$

$2x + y = 3$

ب $x = -13y + 4$

$x + 13y = 4$

ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

$\frac{3}{4}x - 2 - 3y = 0$

$\frac{3}{4}x - 3y = 2$

هذه الصورة هي الصورة العامّة لأنها تُكتب $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

**مثــــــال 4** اكتب كل معادلة مستقيم على صورة المَيل-التقاطع.

أ $2y-2x=6$ ب $6x+4y=4$ ج $\frac{3}{4}y-6x=3$

**الحـل**

أ
$$2y-2x=6$$
$$2y=2x+6$$
$$y=x+3$$

ب
$$6x+4y=4$$
$$4y=-6x+4$$
$$y=-\frac{3}{2}x+1$$

ج
$$\frac{3}{4}y-6x=3$$
$$\frac{3}{4}y=6+3$$
$$y=8x+4$$

**حـــاولْ** اكتب المعادلة $y-23=5(x-4)$ على صورة المَيل-التقاطع، ثم على الصورة العامة.

### المستقيمات الأفقية والعمودية Horizontal and Vertical Lines

معادلة مستقيم أفقي هي $y=b$ حيث يمثِّل ب تقاطع المستقيم مع المحور الثاني.

مَيل المستقيم الأفقي هو دائمًا 0.

معادلة مستقيم عمودي هي $x=b$ حيث يمثِّل $b$ تقاطع المستقيم مع المحور الأول.

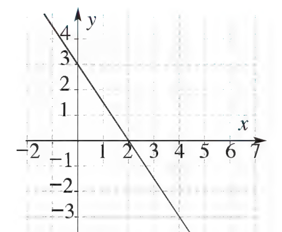
مَيل المستقيم العمودي غير معرَّف.

### مختلف صور معادلة المستقيم Various Form of the Equation of a Line

| اسم الصورة | شكل الصورة | مثال |
|---|---|---|
| المَيل-التقاطع | $y=mx+b$ | $y=3x+5$ |
| العامة | $ax+by=c$ | $3x-2y=5$ |
| المَيل-النقطة | $y-y_1=m(x-x_1)$ | $y-2=-3(x-1)$ |
| النقطتين | $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$ | $y-65=\frac{71-65}{7-5}(x-5)$ |

## التمـــــاريــــــن

### التواصل في الرياضيات




1. اكتب معادلة مستقيم مَيله $m$ ويمر بنقطة الأصل.
2. كيف يتغيَّر المستقيم $y=mx+b$ عندما تتغيَّر قيمة $b$؟
3. كيف يتغيَّر المستقيم $y=mx$ عندما تتغيَّر قيمة $m$ ؟
4. كيف تستعمل صورة المَيل-النقطة لكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(1, 1)$ وَ $(-2, 4)$ ؟
5. أوضح كيف تكتب معادلة المستقيم في الشكل المقابل.
6. كيف تكتب المعادلة $3x+3y+2=0$ على صورة المَيل-التقاطع؟

## تمارين موجَّهة

اكتب كل معادلة مستقيم على الصورة العامة.

**7** $y=3x+7$ **8** $2y=3x-4$ **9** $3x=-7y-17$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع بمعرفة ميله ونقطة يمر بها.

| | الميل | النقطة |
|---|---|---|
| **10** | $2$ | $(3, 4)$ |
| **11** | $-2$ | $(-3, 4)$ |
| **12** | $\frac{1}{3}$ | $(3, -4)$ |

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع، وعلى الصورة العامة.

**13** $y-50=8(x-4)$ **14** $3y=9x+15$ **15** $y=10(-4x+3)$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع بمعرفة نقطتين يمر بهما.

**16** $(-2, 5)\ (5, -2)$ **17** $(-4, 4)\ (-3, 3)$ **18** $(-3, -2)\ (3, 2)$

## تمارين وتطبيقات

حدِّد تقاطع المستقيم مع محورَي الإحداثيات.

**19** $y=4x+5$ **20** $y=8x-1$ **21** $y=-3x+5$

**22** $y=-2x+13$ **23** $y=17x-4$ **24** $y=-5x-9$

**25** $y+x=10$ **26** $3x-2y=12$ **27** $5x+4y=12$

**28** $4x-5y=20$ **29** $2x-7y=14$ **30** $9x+y=18$

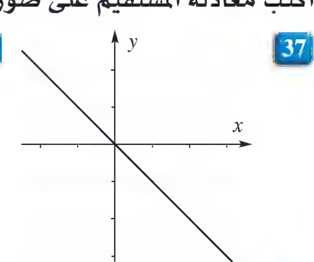
حدِّد مَيل المستقيم وتقاطعه مع محور الصادات، من دون رسم.

**31** $y=-5x$ **32** $y=-5x+3$ **33** $y=7$

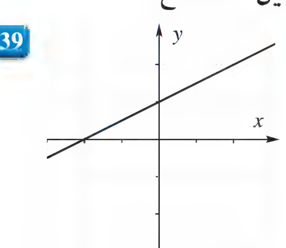
**34** $x=7$ **35** $y=7-x$ **36** $y=\frac{1}{3}x-5$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع.

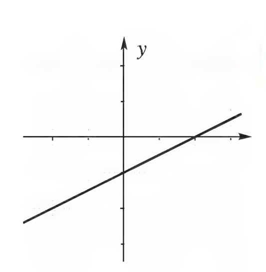
**37**




**38**




**39**




**40** ما ميل مستقيم معادلته $6x+2y=40$ ؟

لا يمكن كتابة معادلة المستقيم $x=4$ على صورة المَيل-التقاطع لأن ميله غير مُعرَّف. لكن يمكن كتابتها على الصورة $1\times x+0\times y=4$. أكمل الجدول:

| | المعادلة المعطاة | صورة المَيل-التقاطع | الصورة العامة |
|---|---|---|---|
| **41** | $x=1$ | | |
| **42** | $y=4$ | | |
| **43** | $x+y=5$ | | |
| **44** | $y=4x$ | | |
| **45** | $x=4y$ | | |

تحدٍّ

46 ارسم المستقيمين $4x+2y=12$ وَ $2x+y=10$. ماذا تلاحظ؟

تطبيقات

47 **بيئة** افترض أن ارتفاع الماء في حوض هو 35cm، وأن هذا الارتفاع يزداد بمعدَّل 5cm يوميًّا. اكتب معادلة تمثِّل ارتفاع الماء $h$ وعدد الأيام $d$. مثِّل هذه المعادلة بيانيًّا. بعد كم يوم يصبح ارتفاع الماء 260cm ؟

تحدٍّ

48 **توفير** اشترى والد دانا لابنه بطاقة اشتراك في النادي الرياضي بقيمة 40 ألف دينار. يدفع دانا بموجب هذه البطاقة ألف دينار كل مرة يدخل فيها النادي عوضًا عن التعرفة العادية، وهي 3.5 آلاف دينار. كم مرّة على دانا أن يذهب إلى النادي لئلاّ يكون والده خاسرًا جرّاء شراء البطاقة؟

تطبيقات

49 **تجارة** ثمن تذكرة الدخول إلى حفل نهاية السنة الدراسية 5 آلاف دينار للكبار وَ3 آلاف دينار للصغار. اكتب معادلة تبيّن حصيلة الحفلة التي بلغت 700 ألف دينار، مستعملاً $x$ للدلالة على عدد الكبار، وَ $y$ للدلالة على عدد الصغار. ما ميل المستقيم الذي يمثِّل هذه المعادلة؟ وما تقاطعه مع المحور الثاني؟

## نظرة إلى الوراء

50 تُعبِّر القاعدة $d=vt$ عن المسافة (بالأمتار) التي تقطعها سيارة تسير بسرعة $v$ مترًا في الثانية في فترة $t$ ثانية. استعمل هذه القاعدة لتحسب المسافة التي قطعتها السيارة في 4 ثوانٍ علمًا بأنها كانت تسير بسرعة 50 مترًا في الثانية.

51 اكتب قاعدة حساب محيط الدائرة $P$ بدلالة نصف قطرها $r$، ثم استعمل هذه القاعدة لتحسب محيط دائرة نصف قطرها 8cm استعمل العدد 3.14 قيمة تقريبية للعدد $\pi$ .

**انسخ الجدول ثم أكمله. اكتب الكسور على أبسط صورة.**

تطبيقات

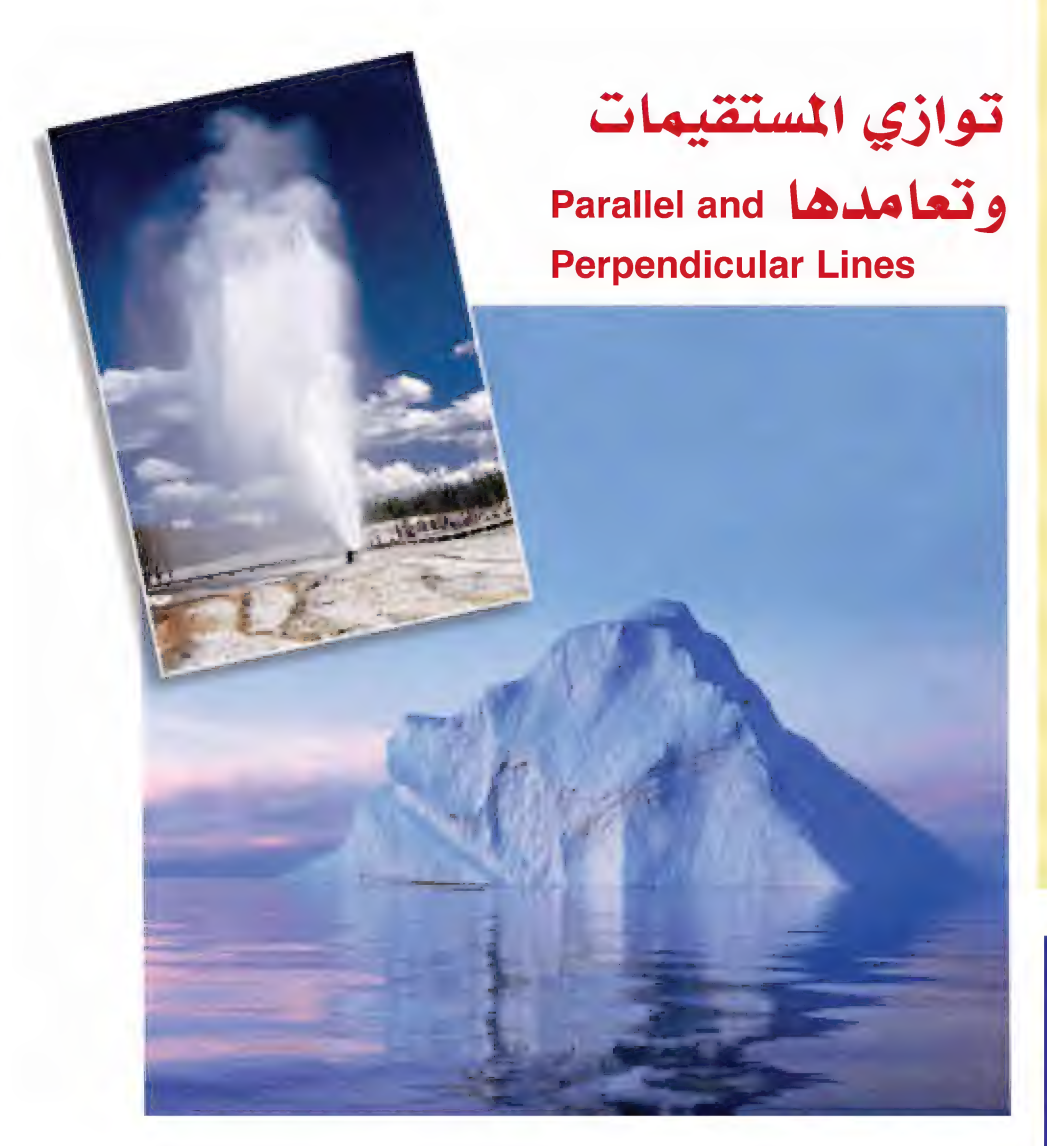
| | الصورة الكسرية | الصورة العشرية | العدد كنسبة مئوية |
|---|---|---|---|
| 52 | | $0.\overline{3}$ | $33\frac{1}{3}\%$ |
| 53 | | 0.875 | |
| 54 | | | 2% |
| 55 | $\frac{1}{20}$ | | |
| 56 | | | $12\frac{1}{2}\%$ |
| 57 | $\frac{2}{3}$ | | |
| 58 | $\frac{1}{6}$ | | |
| 59 | | | 0.01% |
| 60 | | 0.80 | |
| 61 | $\frac{2}{5}$ | | |

## نظرة إلى الأمام

62 ارسم، في المستوى الإحداثيّ نفسه، المستقيمين $y=2.12x-3.7$ وَ $y=x+5.4$ . حدِّد إحداثيي كل نقطة تقاطع ممكنة بينهما.




# توازي المستقيمات وتعامدها
# Parallel and Perpendicular Lines



**الأهداف**

- يميِّز توازي مستقيمين أو تعامدهما بمقارنة مَيلَيهما.
- يكتب معادلة مستقيم موازٍ لمستقيم، أو متعامد معه.

**لماذا**

تعرُّف المستقيمات المتوازية أو المتعامدة عن طريق مقارنة ميولها، يشكّل خطوة مهمّة لتمييز العلاقات بين المستقيمات من دون اللجوء إلى رسمها.

**تطبيقات**
**فيزياء**

يبدو الماء بمظاهر مختلفة وفقًا لدرجات حرارته. فهو يتجمَّد على درجة حرارة منخفضة جدًّا كما يبيِّن ذلك جبل الثلج في الصورة، أو يتحوّل إلى بخار على درجة حرارة عالية كما يبيِّن ذلك البخار المتصاعد من الأرض.

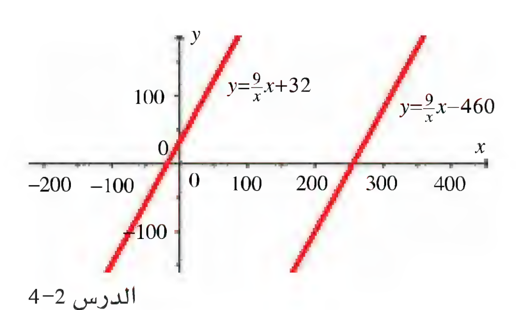
| | فهرنهايت | مئوي | كالفن |
|---|---|---|---|
| غليان الماء | 212 | 100 | 373 |
| تجمّد الماء | 32 | 0 | 273 |
| الصفر المطلق | −460 | −273 | 0 |

يبيِّن الجدول المقابل درجات حرارة على ثلاثة مقاييس: مقياس فهرنهايت والمقياس المئوي ومقياس كالفن. يتمّ تحويل درجات الحرارة من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت وفقًا للقانون $F=\frac{9}{5}C+32$ ومن مقياس كالفن إلى مقياس فهرنهايت وفقًا للقانون $F=\frac{9}{5}K-459.4$ .

يمكنك إعادة كتابة هاتين المعادلتين باستعمال $y$ عوضًا عن $F$ وَ $x$ عوضًا عن $C$ أو $K$ .

$y=\frac{9}{5}x+32$ وَ $y=\frac{9}{5}x-460$ .

لاحظ أن المستقيمين اللذين يمثِّلان المعادلتين متوازيان، وأن مَيلَيهما متساويان.



### المستقيمات المتوازية Parallel Lines

إذا تساوى مَيلا مستقيمين فإنهما يتوازيان.
إذا توازى مستقيمان غير عموديين فإن مَيلَيهما يتساويان.

**مثـــال 1**

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الموازي للمستقيم $y=3x-7$ والذي يقطع المحور الثاني عند 4.**

**الحـل**

مَيل هذا المستقيم هو 3. بما أنه يقطع محور الصادات عند 4، فإن معادلته هي $y=3x+4$ .

**حـــاول** اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الموازي للمستقيم $y=0.5x+5$ والذي يقطع محور الصادات عند $-2$.

تذكّر أن مستقيمين يتعامدان إذا تقاطعا وشكّلا زوايا قائمة. سوف تستكشف في النشاط التالي العلاقة بين مَيلَي مستقيمين متعامدين.

## النشاط

### استكشاف العلاقة بين تعامد المستقيمات والمَيل Slope of Perpendicular Line

تحتاج في هذا النشاط إلى مسطرة قائمة وورقة بيانيّة عليها محورا المستوي الإحداثي.

1. هل يتقاطع المستقيمان $y=-2x+3$ وَ $y=0.5x-2$؟ أوضح ذلك.
2. ارسم هذين المستقيمين في المستوي الإحداثي نفسه وحدِّد بيانيًّا إحداثيي نقطة تقاطعهما.
3. ما العلاقة بين المستقيمين في رأيك؟ استعمل المسطرة القائمة لتتحقق من جوابك.
4. اضرب مَيل المستقيم الأول في مَيل المستقيم الثاني. ما ناتج الضرب؟

### المستقيمات المتعامدة Perpendicular Lines

إذا كان ناتج ضرب مَيلَي مستقيمين $-1$، فإنهما يتعامدان.
إذا تعامد مستقيمان فإن ناتج ضرب مَيلَيهما $-1$.

**مثـــال 2**

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الذي يقطع المحور الثاني عند 4 ويتعامد مع المستقيم $y=3x+2$ .**

**الحـل**

ميل المستقيم هو $-\frac{1}{3}$ لأنه يتعامد مع المستقيم $y=3x+2$ ذي المَيل 3. المعادلة المطلوبة هي $y=-\frac{1}{3}x+4$ .

**حـــاولْ** اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الذي يقطع المحور الثاني عند 6 ويتعامد مع المستقيم $y=4x+2$ .

**مثـــــال** 3 **اكتب، على صورة الميل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(4, 5)$ والمتعامد مع المستقيم $2x+3y=7$ .**

الحــل

ابدأ بكتابة معادلة المستقيم المعطى على صورة المَيل-التقاطع: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ . يجب أن يكون مَيل المستقيم المتعامد معه $\frac{3}{2}$ . وبما أن معادلة المستقيم على صورة المَيل النقطة هي $y-y_1=m(x-x_1)$ ، فإن المعادلة المطلوبة هي $y-5=\frac{3}{2}(x-4)$ .

**حـــاولْ** اكتب، على صورة المَيل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(3, -2)$ والمتعامد مع المستقيم $4x-2y=-6$ .

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1 أوضح كيف تكتب معادلة لمستقيم موازٍ للمستقيم $y=4x+3$ .

2 مستقيم مَيله $\frac{2}{3}$ . أوضح كيف تجد مَيل مستقيم متعامد معه.

3 كيف تحدِّد مَيل مستقيم متعامد مع المستقيم $y=\frac{1}{3}x+2$ ؟

4 أوضح كيف تجد معادلة مستقيم متعامد مع المستقيم $y=4x+3$.

## تمارين موجّهة

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة لمستقيم يقطع محور الصادات عند 5 ويوازي المستقيم المعطى.**

5 $y=2x+3$ 6 $y=-3x$ 7 $4y=x$ 8 $y=-6x+2$

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة لمستقيم يقطع المحور الثاني عند 5 ويتعامد مع المستقيم المعطى.**

9 $y=3x-3$ 10 $y=-3x$ 11 $5y=x$ 12 $-6y=x$

**اكتب، على صورة المَيل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(4, 5)$ والمتعامد مع المستقيم المعطى.**

13 $2x+3y=4$ 14 $x-3y=8$ 15 $-2x-8y=16$

## تمارين وتطبيقات

**حدِّد مَيل كل مستقيم.**

16 $y=4x+10$ 17 $3x+y=7$ 18 $10=-5x+2y$

19 $4x-3y=12$ 20 $y=\frac{1}{3}x-3$ 21 $3x-y=7$

22 $2x-y=14$ 23 $3x+2y=51$ 24 $13=20x-5y$

25 $3y=-4x+2$ 26 $\frac{2}{3}x+6y=1$ 27 $4x+\frac{1}{4}y=8$

**حدِّد مَيل مستقيم متعامد مع المستقيم المعطى.**

28 $y=-\frac{1}{3}x+10$ 29 $-\frac{1}{2}x-y=20$ 30 $13=-x+y$

31 $3x+12y=12$ 32 $y=5x+10$ 33 $3x+y=2$

34 $20=-5x+2y$ 35 $4x+4y=12$ 36 $2y=5x+11$

37 $-4x+8y=17$ 38 $12x+3y=10$ 39 $4y=20x-3$

**اكتب، على الصورة العامة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة (2، 3) والموازي للمستقيم المعطى.**

40 $x+y=1$ 41 $3x=7y+2$ 42 $y=2x-3$

43 $3y=2x$ 44 $7x-2y=10$ 45 $11=3y+2x$

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم المحدَّد بحسب المعطيات.**

| | يمر بـ | موازٍ للمستقيم |
|---|---|---|
| 46 | $(3, -5)$ | $5x-2y=10$ |
| 47 | $(-2, 7)$ | $y=3x-4$ |
| 48 | $(2, 4)$ | $y=7$ |
| 49 | $(2, -4)$ | $y=3x-4$ |
| 50 | $(-1, 4)$ | $y=2x+5$ |

| | يمر بـ | موازٍ للمستقيم |
|---|---|---|
| 51 | $(3, -5)$ | $5x+2y=10$ |
| 52 | $(2, 7)$ | $y=3x-4$ |
| 53 | $(2, -4)$ | $y=7$ |
| 54 | $(-2, 4)$ | $3x+y=5$ |
| 55 | $(-1, 4)$ | $y=2x-5$ |

**ارسم المستقيم $y=5x$.**

56 ارسم مستقيمًا موازيًا للمستقيم $y=5x$ واكتب معادلته.

57 ارسم مستقيمًا متعامدًا مع المستقيم $y=5x$ واكتب معادلته.

**ماذا يمكنك أن تقول عن مَيل كلٍّ من المستقيمات التالية؟**

58 موازٍ لمستقيم أفقي. 59 متعامد مع مستقيم أفقي.

60 موازٍ لمستقيم عمودي. 61 متعامد مع مستقيم عمودي.

ربط

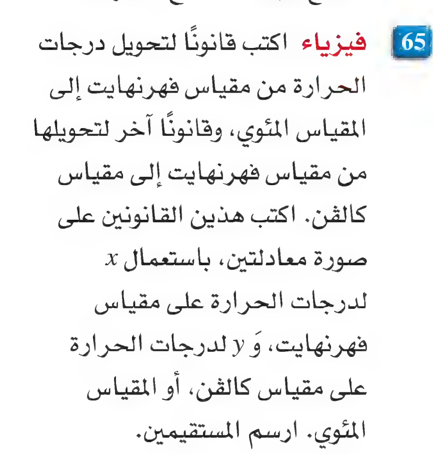
**هندسة اكتب معادلات لأربعة مستقيمات تتقاطع لتشكّل مربّعًا تكون أضلاعه:**

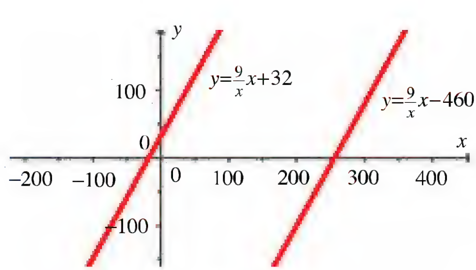
62 موازية للمحورين الإحداثيين. 63 غير موازية للمحورَين الإحداثيَّين.

**64** **هندسة** يقع أحد أضلاع مربّع على المستقيم $y=\frac{3}{4}x+5$ . اكتب معادلات لمستقيمات يمكن أن تقع عليها الأضلاع الأخرى.

**تطبيقات**

**65** **فيزياء** اكتب قانونًا لتحويل درجات الحرارة من مقياس فهرنهايت إلى المقياس المئوي، وقانونًا آخر لتحويلها من مقياس فهرنهايت إلى مقياس كالفن. اكتب هذين القانونين على صورة معادلتين، باستعمال $x$ لدرجات الحرارة على مقياس فهرنهايت، وَ $y$ لدرجات الحرارة على مقياس كالفن، أو المقياس المئوي. ارسم المستقيمين.






المعادلة $y=\frac{9}{5}x+32$ تحوّل من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت.
والمعادلة $y=\frac{9}{5}x-460$ تحوّل من مقياس كالفن إلى مقياس فهرنهايت.

**66** ما العلاقة بين المستقيمين في التمرين 65؟ اكتب مَيل كل منهما.

**67** ما العلاقة بين المستقيمين في التمرين 65 والمستقيمين اللذين يمثّلان التحويل من مقياسي كالفن والمئوي إلى مقياس فهرنهايت؟

**تحدٍّ**

## نظرة إلى الوراء

**68** ضع أقواسًا حيث يجب، لكي تصحّ المساواة $2\times7+35\div7-10=2$ .

**اكتب على الصورة الأبسط.**

**69** $2x^2+3y+4y+3x^2$

**70** $3x+2+4y-2+3y$

**71** $2x+3xy+5x^2-7xy$

**72** $3x+4y+2x+5-6y$

**73** $4x^2+5x+8+11x^2+3x$

**74** $3xy+2x+4y-xy$

**75** $9x^2+5xy+2x-4x^2$

**76** $4y^2-12y+6xy+3y$

## نظرة إلى الأمام

**كم زوجًا مرتّبًا تشكّل حلاً لنظام من معادلتين خطّيتين بمجهولين إذا كان المستقيمان اللذان يمثّلان المعادلتين:**

**77** متوازيين؟

**78** متعامدين؟

الدرس 5



# حل أنظمة المعادلات الخطّية بيانيًّا

## Solving Linear Systems Graphically

**الأهداف**

- يحلّ بيانيًّا نظامًا من معادلتين خطّيتين.
- يصنّف نظامًا من معادلتين خطّيتين.

**لماذا**

غالبًا ما تُستعمل أنظمة المعادلات الخطية لحلّ مسائل من الواقع، وبخاصة في الإدارة والاقتصاد. في بعض الحالات، لا يكون إيجاد الحل المضبوط مهمًّا، بل المطلوب إيجاد حلّ تقريبي. وفي بعض الأحيان يكون مطلوبًا النظر إن كان الحل موجودًا، وحيدًا أو متعددًا. في هذه الحالات، يساعدنا الحل البياني لنظام المعادلات الخطية على الإجابة عن السؤال المطروح.



## حلّ أنظمة المعادلات الخطّية بيانيًّا Solving Linear Systems Graphically

تعلّمت في الفصل السابق كيف تحلّ أنظمة المعادلات الخطّية باستعمال التعويض أو الحذف. غير أن كلاًّ من هاتين الطريقتين تتطلّب تحديد قيمة أحد المجهولين ثم تحديد قيمة الآخر. مِن ناحية ثانية، قد يتطلّب حلّ مسألة من الحياة اليومية إيجاد قيَم تقريبية للحلّ فقط، وقد يتطلّب الإجابة عن سؤال بسيط مثل: هل هناك حلول لنظام المعادلات؟ وما عددها في حالة وجودها؟ سوف تتعلّم في هذا الدرس طريقة لحلّ هذه الأنظمة تؤمّن الإجابة السريعة عن مثل هذه الأسئلة.

### النشاط 1

### حل نظام معادلات خطّية بيانيًّا Solving Linear Systems Graphically

تلزمك حاسبة بيانية أو ورقة بيانية.

سوف تحلّ بيانيًّا النظام $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=-x+5 \end{cases}$

1. ماذا تقول عن النقطة $(c, d)$ بالنسبة إلى المستقيمين $y=3x+1$ وَ $y=-x+5$ عندما يكون الزوج المرتَّب $(c, d)$ حلاًّ لهذا النظام؟
2. ارسم كلاًّ من المستقيمين في المستوى الإحداثي نفسه.
3. أعطِ قيَمًا تقريبيّة لإحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.
4. أعطِ حلاًّ تقريبيًّا للنظام.

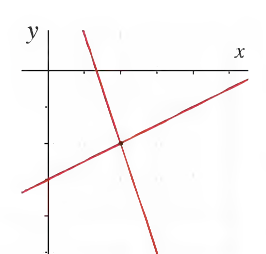
نقطة مراقبة √

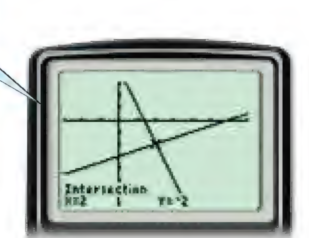
## مثـــــال 1

حُلَّ بيانيًا النظام $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x-2y=6 \end{cases}$

**الحـل**

بغية رسم المستقيم $3x+y=4$ ، حدِّد نقطة تقاطعه مع المحور الثاني عن طريق إعطاء المجهول $x$ قيمة الصفر وإيجاد قيمة المجهول $y$ التي تقابلها. تحصل على $y=4$ . يمر المستقيم إذًا في النقطة $(0,4)$ . حدِّد أيضًا نقطة تقاطع المستقيم مع المحور الأول عن طريق إعطاء المجهول $y$ قيمة الصفر وإيجاد قيمة $x$ التي تقابلها. تحصل على $x=\frac{4}{3}$ . يمرّ المستقيم إذًا في النقطة $\left(\frac{4}{3},0\right)$ . الآن، ارسم المستقيم.






عرِّف مواصفات النافذة كما يلي: 7 ;3− أفقيًا وَ 3 ;7− عموديًّا بغية الحصول على الصورة المقابلة.

استعمل الطريقة السابقة لرسم المستقيم $x-2y=6$. يتقاطع المستقيمان عند النقطة $(2,-2)$ . الحل هو $(2,-2)$ .

تحقَّق من الحل بالتعويض عن $x$ بالعدد 2 وعن $y$ بالعدد $-2$ .

$$3x+y\stackrel{?}{=}4 \qquad x-2y\stackrel{?}{=}6$$

$$3\times 2+(-2)\stackrel{?}{=}4 \qquad 2-2(-2)\stackrel{?}{=}6$$

$$6-2\stackrel{?}{=}4 \quad \text{صواب} \qquad 2+4\stackrel{?}{=}6 \quad \text{صواب}$$

## النشاط 2

### تصنيف أنظمة المعادلات الخطّية — Classifying Linear Systems

تلزمك حاسبة بيانية أو ورقة بيانية.

1. مثِّل بيانيًّا النظام الأول في الجدول المقابل.
   أ ) هل يتقاطع المستقيمان؟
   ب) هل للنظام حلّ وحيد؟ ما هذا الحل إذا كان موجودًا؟ إذا لم يكن للنظام حلّ، فعدِّل النظام لتحصل على نظام آخر له حل وحيد واحسب الحل.
2. كرّر ما قمت به مستعملاً النظام الثاني ثم الثالث.
3. اشرح العلاقة بين المستقيمين: **تفكير ناقد**
   - عندما لا يكون للنظام حل؛
   - عندما يكون للنظام عدد غير محدّدٍ من الحلول؛
   - عندما يكون للنظام حل وحيد.

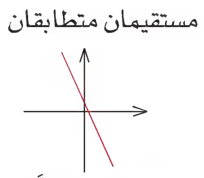
| |
|---|
| $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x+5 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x+1 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} y=\frac{8-3x}{4} \\ y=-\frac{3}{4}x+2 \end{cases}$ |

عندما تحاول أن تحل بيانيًّا نظامًا من معادلتين خطّيتين، تكون في إحدى الحالات الثلاث التالية:

مستقيمان متقاطعان — نظام محدَّد

مستقيمان متطابقان — نظام غير محدَّد

مستقيمان متوازيان — نظام مستحيل



## تصنيف أنظمة المعادلات الخطّية Classifying Linear Systems

تُصنَّف أنظمة المعادلات في ثلاثة أنواع أساسية:

- النظام المستحيل **Inconsistent**: هو نظام لا حلّ له.
- النظام المحدَّد **Independent**: هو نظام له حلّ وحيد.
- النظام غير المحدَّد **Dependent**: هو نظام له عدد غير محدَّد من الحلول.

### مثــــال 2

صنِّف كل نظام وحدِّد حلَّه في حال وجوده.

أ $\begin{cases} x+y=5 \\ x-5y=-7 \end{cases}$

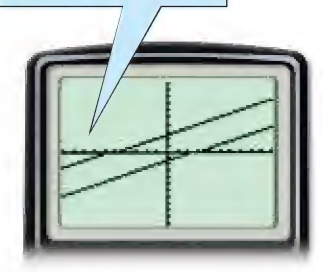
ب $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+5=2y \end{cases}$

**الحـل**

المستقيمان يتقاطعان لأن مَيلَيهما مختلفان

بما أن المستقيمين يتقاطعان فإن النظام نظام محدَّد. الحل هو $(3, 2)$ .

المستقيمان لا يتقاطعان لأن ميليهما متساويان وهما لا يتطابقان



بما أن المستقيمين متوازيان، فإن النظام مستحيل.


**حـــاول** صنِّف النظام $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$ وحدِّد حلَّه في حال وجوده.

**تفكير ناقد** صنِّف النظام $\begin{cases} y=mx \\ y=nx \end{cases}$ حيث $m$ وَ $n$ مختلفان عن الصفر، دارسًا جميع الحالات الممكنة.

### مثــــال 3

**تطبيــــقات**
**علوم اجتماعية**

أظهرت الإحصاءات حول سن الزواج للذكور والإناث في أحد البلدان، المعطيات المبيَّنة في الصورة المقابلة. أنشئ جدولاً يلخِّص هذه المعطيات. إذا استمر الأمر على هذا المنوال، فهل سيأتي وقت يتساوى فيه سن الزواج عند الذكور وسن الزواج عند الإناث؟



**الحـل**

للإجابة عن السؤال، مثِّل المعطيات الخاصة بالجنسين في المستوي الإحداثيّ نفسه.

| السنة بعد 1970 | سن الزواج للرجال | سن الزواج للنساء |
|---|---|---|
| 5 | 23.02 | 21.14 |
| 10 | 23.92 | 22.04 |
| 15 | 24.82 | 22.94 |
| 20 | 25.72 | 23.84 |
| 25 | 26.62 | 24.74 |

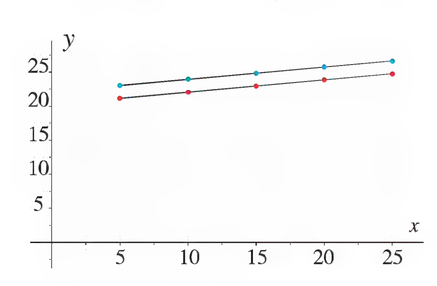
لاحظ أن النقاط العائدة إلى كل من الجنسين تقع على مستقيم واحد. مَيل المستقيم العائد إلى الذكور هو $m_1 = \frac{24.82-23.02}{15-5} = -0.18$ . كما أن ميل المستقيم العائد إلى الإناث هو $m_2 = \frac{22.94-21.14}{15-5} = 0.18$ .

لكي تكتب معادلة المستقيم العائد إلى الذكور، اكتب $y = 0.18x + b$ . حدِّد $b$ باستعمال النقطة $(10, 23.92)$ تحصل على $23.92 = 0.18x + b$ ، وبالتالي $b = 23.92 - 1.8 = 22.12$ .

معادلة المستقيم العائد إلى الذكور هي، إذًا، $y = 0.18x + 22.12$ . تستطيع إيجاد معادلة المستقيم العائد إلى الإناث بالطريقة نفسها فتحصل على $y = 0.18x + 20.24$ .

تتساوى سن الزواج عند الذكور مع سن الزواج عند الإناث إذا كان لنظام المعادلات التالي حلول:

$$\begin{cases} y = 0.18x + 22.12 \\ y = 0.18x + 20.24 \end{cases}$$




لكي تجد الجواب، حُلَّ النظام بيانيًّا. يعطينا تمثيل المعادلتين بيانيًّا مستقيمين متوازيين. ينتج من ذلك أن النظام مستحيل، وأنه إذا استمرّت الأمور على المنوال نفسه، فلا أمل أن تتساوى سن الزواج عند الجنسين.

**حـــاول** حُلّ النظام $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 18x - 2y = 4 \end{cases}$ بطريقة التعويض ثم تحقَّق من الحل.

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

**1** أوضح كيف تحلّ بيانيًّا النظام $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ .

**2** كيف تمثِّل بيانيًّا النظام $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ ؟ أوضح كيف تقدِّر الحل بالنظر إلى الرسم البياني. لماذا عليك أن تتحقّق من صحة تقديرك؟

**3** أوضح كيف تجد قاعدة دالّة خطّية بمعرفة بيانها.

## تمارين موجّهة

**حُلّ كل نظام بيانيًّا.**

**4** $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y = -x - 9 \end{cases}$

**6** $\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

**مثِّل كل نظام بيانيًّا وقدِّر الحل. قرِّب تقديراتك إلى أقرب عُشر.**

**7** $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 2 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$

**8** $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$

**9** مع لانه 4 آلاف دينار مكوّنة من قطع نقدية من فئتَي 250 دينارًا و500 دينار. ما عدد القطع من كل فئة، إذا كان عدد القطع كلها 13 قطعة؟

## تمارين وتطبيقات

**صنّف كلّ نظام.**

**10** $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=8 \end{cases}$

**11** $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 4y-12=-3x \end{cases}$

**مثّل بيانيًا كلّ نظام وصنّفه. حدّد الحلّ بيانيًا عندما يكون النظام محدَّدًا.**

**12** $\begin{cases} 6x+4y=12 \\ 2y=6-3x \end{cases}$

**13** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x+4y=-10 \end{cases}$

**14** $\begin{cases} y=2x-1 \\ 6x-y=13 \end{cases}$

**15** $\begin{cases} x+3y=13 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$

**16** $\begin{cases} y=-2x-7 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

**17** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

**18** $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$

**19** $\begin{cases} 3x-6y=9 \\ \frac{1}{2}x=y+\frac{3}{2} \end{cases}$

**20** $\begin{cases} 4x+5y=-7 \\ 3x-6y=24 \end{cases}$

**21** $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$

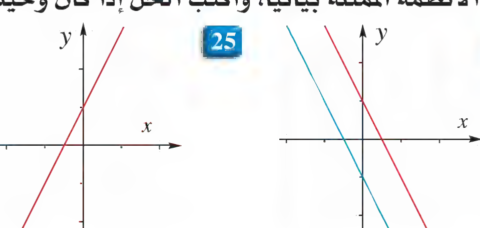
**22** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -3x+y=1 \end{cases}$

**23** $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 3x+7y=47 \end{cases}$

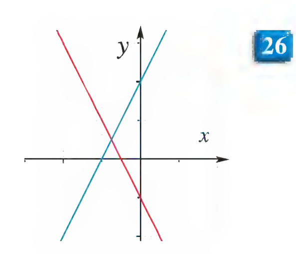


**صنّف الأنظمة الممثَّلة بيانيًا، واكتب الحلّ إذا كان وحيدًا.**

**24** **25**




**26**




**27** هل يشكّل الزوج المرتَّب حلاً للنظام؟

أ $(1, 3)$؛ $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ x-y=11 \end{cases}$

ب $(5, -2)$؛ $\begin{cases} 4x-3y=26 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

ج $(2, 1)$؛ $\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+3y=5 \end{cases}$

د $(5, 2)$؛ $\begin{cases} 4x-2y=16 \\ -8x+4y=-32 \end{cases}$

هـ أحد الأنظمة الأربعة السابقة غير محدَّد. جده، ثم اكتب ثلاثة أزواج مرتَّبة إضافية يشكِّل كلّ منها حلاً له.

**مثّل كل نظام بيانيًا وصنّفه. جِد حلّ النظام مقرّبًا إلى أقرب جزء من مئة عند الضرورة.**

**28** $\begin{cases} y=5x+2.72 \\ y=3.6x+3.126 \end{cases}$

**29** $\begin{cases} y=4.3x-0.44 \\ y=-2x+4.6 \end{cases}$

**30** $\begin{cases} -\frac{2}{5}x+y=-\frac{1}{10} \\ 3y-2x=-\frac{5}{6} \end{cases}$

**31** $\begin{cases} \frac{1}{7}=\frac{1}{14}x+\frac{11}{2}y \\ y=4x+14 \end{cases}$

**32** $\begin{cases} 0.7y=0.8x+0.78 \\ -\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y=2.1 \end{cases}$

**33** $\begin{cases} 0.001y+\frac{4}{5}x=0.2014 \\ 0.8x-0.02y=0.172 \end{cases}$

**هندسة** حديقة مستطيلة الشكل محيطها 130m. ثلاثة أضعاف طولها يساوي عشرة أضعاف عرضها.

**34** احسب طول الحديقة وعرضها.

**35** احسب مساحتها.

**36** **مختبرات** قام عامل المختبر بمزج محلولين ملوحة أوّلهما 1 %0 وملوحة الثاني 4%. ما الكمية التي عليه استعمالها من كل محلول لكي يحصل على 500mg من محلول ملوحته 6%؟

**37** **طيران** باشرت طائرة، تحلّق على ارتفاع 7000m، الهبوط بمعدّل 450m في الدقيقة. وباشرت طائرة أخرى تحلّق على ارتفاع 375m، الصعود بمعدّل 575m في الدقيقة. اكتب نظامًا من معادلتين خطّيتين يسمح بحساب عدد الدقائق التي ستمرّ قبل أن تصبح الطائرتان على الارتفاع نفسه. حُلّ هذا النظام بيانيًا.

## نظرة إلى الوراء

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

**38** $-4x+2x$

**39** $3y+(-2x)-3y$

**40** $x-y+x$

**41** $5b^0$

**42** $36^{\frac{1}{2}}$

**43** $25^{\frac{1}{2}}$

**44** $9^{\frac{3}{2}}$

**45** $\left(\frac{2x^3}{x^{-2}}\right)^2$

**46** $\left(\frac{y^{-1}n^2}{n^{-3}}\right)^{-3}$

**47** $\left(\frac{2q^3b^{-2}}{-q^2b^{-3}}\right)^{-1}$

**48** $3(5-2x)-(8-6x)=-9+2(3x+4)-10$

## نظرة إلى الأمام

**49** حُلَّ بيانيًّا النظام أدناه المكوّن من معادلة خطّية وأخرى غير خطّية.

$$\begin{cases} y=x^2+3 \\ y=4x \end{cases}$$




# دوال المطلق Absolute Value Functions



**الأهداف**

- يتعرَّف مطلق العدد الحقيقي ويحسبه.
- يتعرَّف دالّة المطلق ويحدِّد عناصرها.
- يمثِّل بيانيًّا دالّة المطلق.

**لماذا**
تتضمَّن القياسات التي نقوم بها عادة نسبة مقبولة من الخطأ نعبِّر عنها باستعمال القيمة المطلقة. هذا ما يحدث في ميادين كثيرة، مثل الصناعة.

**تطبيقات**
إحصاء

## النشاط 1

### استكشاف القيمة المطلقة Exploring Absolute Value

قام تلاميذ الصف العاشر بنشاط يهدف إلى قياس الخطأ الذي يقع فيه الإنسان عندما يقدِّر أن دقيقة من الوقت مرّت. توزَّع التلاميذ على مجموعات كل منها تضم تلميذين. عصب أحد التلميذين عينَي زميله وطلب إليه أن يرفع يده ثم ينزلها بعد أن يعتبر أن دقيقة من الوقت مرَّت. استعمل التلميذ الأول آلة قياس الوقت (الكرونومتر) لقياس الفترة بين رفع التلميذ الثاني ليده ثم إنزالها، ودوَّن ما حصل عليه. بعد ذلك، تبادل التلميذان الأدوار.

يبيِّن الجدول المقابل نتائج هذا النشاط.

1. احسب الخطأ الذي وقع فيه كل تلميذ بطرح 60 من عدد الثواني التي قدَّر أنها دقيقة ودوِّن ذلك في العمود الثالث. إذا كان هذا الفرق سالبًا، فذلك يعني أن تقدير التلميذ كان أقلّ من دقيقة فعلية. أما إذا كان الفرق موجبًا، فذلك يعني أن تقدير التلميذ كان أكثر من دقيقة فعلية.

| التلميذ | الوقت المقدَّر للدقيقة | الخطأ | الخطأ المطلق |
|---|---|---|---|
| لافين | 49 | | |
| بنكين | 59 | | |
| دوين | 51 | | |
| نوزين | 65 | | |
| نردين | 68 | | |
| دون | 77 | | |
| نارين | 66 | | |
| يارا | 54 | | |
| آلان | 67 | | |
| نوزاد | 46 | | |
| بيوند | 62 | | |
| تارا | 61 | | |
| سارا | 53 | | |
| شارا | 64 | | |

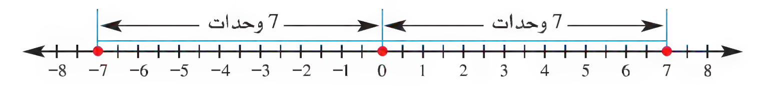
يهتمّ العلماء عادة بمدى بعد التقدير عن القيمة الحقيقية، دون التوقّف عند كونه أكثر أو أقلّ منها. هذا البعد يُدعى **الخطأ المطلق Absolute Error**.

مثال على ذلك، قدَّر محمد أن دقيقة مرَّت بعد 67 ثانية. خطأه كان $7=60-67$ . وقدَّر وسيم أن دقيقة مرَّت بعد 53 ثانية. خطأه كان $-7=60-53$ . كلٌّ منهما ابتعد 7 ثوانٍ عن القيمة الحقيقية للدقيقة. تعبِّر عن ذلك بقولك أن كلاً منهما ارتكب خطأً مطلقًا يساوي 7 ثوانٍ. العدد 7 هو **القيمة المطلقة Absolute Value** لكل من العددين 7 وَ $-7$ . أو **مطلق** كل منهما. للتعبير عن ذلك اكتب $|7|=|-7|=7$ .

2. دوِّن في العمود الرابع بُعد كلّ تقدير عن القيمة الحقيقية للدقيقة، أي قيمته المطلقة.

3. قارن بين كلّ عدد في العمود الثالث وقيمته في العمود الرابع. ما العلاقة بين إشارة العدد وإشارة قيمته المطلقة؟

يمكنك تمثيل مطلق عدد حقيقي باستعمال خط الأعداد. **مطلق** عدد حقيقي هو المسافة بين النقطة التي تمثِّله على خط الأعداد ونقطة الأصل.




المسافة بين نقطة العدد 7 ونقطة الأصل هي 7 وحدات. مطلق العدد هو 7، أي $|7|=7$ .

المسافة بين نقطة العدد $-7$ ونقطة الأصل هي 7 وحدات. مطلق العدد $-7$ هو 7، أي $|-7|=7$.

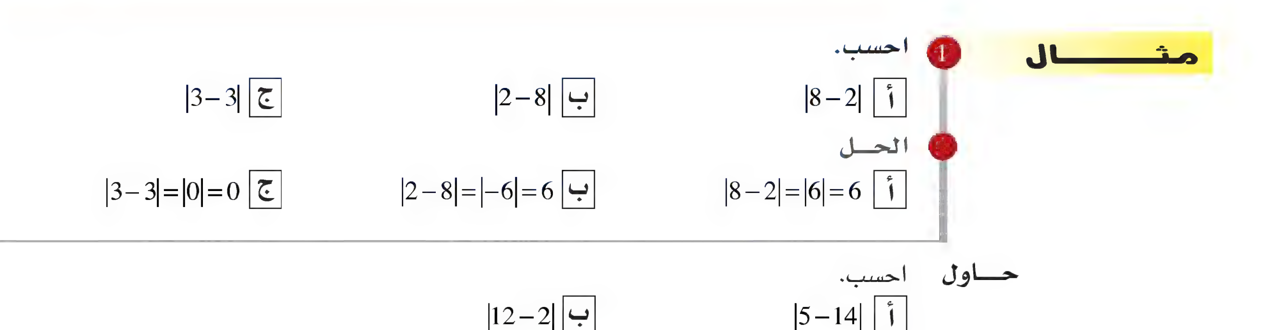
يقود التمثيل الهندسي السابق إلى التفسير الجبري التالي: القيمة المطلقة لعدد حقيقي هو العدد نفسه عندما يكون العدد غير سالب، وهو معكوسه عندما يكون سالبًا.

**مطلق عدد حقيقي Absolute Value of Real Number**

**التعريف الجبري**

$$\begin{cases} |x|=x & \text{إذا كان } x\geq 0 \\ |x|=-x & \text{إذا كان } x<0 \end{cases}$$

**التعريف الهندسي** $|x|$ هو المسافة على محور الأعداد بين النقطة $x$ ونقطة الأصل.



**مثال** 1

احسب.

أ $|8-2|$ ب $|2-8|$ ج $|3-3|$

**الحل**

أ $|8-2|=|6|=6$ ب $|2-8|=|-6|=6$ ج $|3-3|=|0|=0$

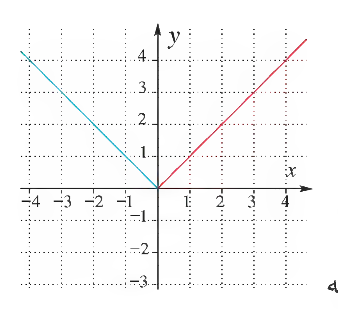
**حاول** احسب.

أ $|5-14|$ ب $|12-2|$

## دالّة المطلق Absolute Value Function

دالّة **المطلق** هي الدالّة المعرَّفة بالقاعدة $f(x)=|x|$ .

## مثـــــال 2




أ ما مجال دالّة المطلق وما مداها؟

ب ارسم بيان دالّة المطلق.

**الحل**

أ بما أنك تستطيع حساب مطلق أي عدد حقيقي، فإن مجال دالّة المطلق هو مجموعة الأعداد الحقيقية. وبما أن مطلق أي عدد حقيقي هو العدد نفسه إن كان غير سالب، ومعكوسه إن كان سالبًا، فإن مطلق أي عدد حقيقي هو دائمًا عدد حقيقي غير سالب. مدى دالّة المطلق هو، إذًا، مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة.

ب أنشئ جدول قيَم لدالّة المطلق.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

مثّل بيانيًا النقاط المحدَّدة في هذا الجدول وصل ما بينها بخط مناسب.

**حـــاول** حدِّد مجال كل دالّة ومداها، ثم أنشئ بيانها.

أ $y=2|x|$

ب $y=|x-2|$

## النشاط 2

### استكشاف دوال المطلق Exploring Absolute Value Functions

تلزمك ورقة بيانيّة أو حاسبة بيانيّة.

1. ارسم، في المستوى الإحداثي نفسه، بيان كل من الدالّتين $y=|x|$ وَ $y=|x-3|$ .
2. كيف يؤثِّر إنقاص 3 من المتغيِّر $x$ على بيان دالّة المطلق؟ **نقطة مراقبة √**
3. ارسم، في المستوى الإحداثي نفسه، بيان كل من الدالّتين $y=|x|$ وَ $y=|x|-3$ .
4. كيف يؤثِّر إنقاص 3 من المتغيِّر $y$ على بيان دالّة المطلق؟ **نقطة مراقبة √**
5. ارسم، في المستوى الإحداثي نفسه، بيان كل من الدالّتين $y=|x|$ وَ $y=-|x|$ .
6. كيف يؤثِّر إحلال معكوس المتغيِّر $y$ محلّه $-y$ على بيان دالّة المطلق؟ **نقطة مراقبة √**

تعاملت في النشاط السابق مع دوالّ تُعرَّف انطلاقًا من دالّة المطلق. كما تلاحظ، فإن دالّة المطلق تؤدّي دور المولِّد لهذه الدوالّ. من هنا كانت تسميتها: **الدالّة الأم Parent Function**.

وكما يمكن الحصول على الدوالّ المولَّدة من الدالّة الأم بتحويلات جبرية، يمكن الحصول على بيان الدوال المولَّدة بتحويلات هندسيّة، انطلاقًا من بيان الدالّة الأم.

يبيِّن الجدول المقابل، التحويل الهندسي الذي يقابل كل تحويل جبري، ويسمح بإنشاء بيان الدالّة المولَّدة، انطلاقًا من بيان الدالّة الأم $y=|x|$ .

| التحويل الجبري $a>0$ وَ $b>0$ | التحويل الهندسي |
|---|---|
| $y=|x| \to y=|x-a|$ | سحب أفقي إلى اليمين $a$ وحدة |
| $y=|x| \to y=|x+a|$ | سحب أفقي إلى اليسار $a$ وحدة |
| $y=|x| \to y=|x|-b$ | سحب عمودي إلى الأسفل $b$ وحدة |
| $y=|x| \to y=|x|+b$ | سحب عمودي إلى الأعلى $b$ وحدة |
| $y=|x| \to y=-|x|$ | انعكاس حول المحور الأول |
| $y=|x| \to y=|-x|$ | انعكاس حول المحور الثاني |

**مثـــــال**

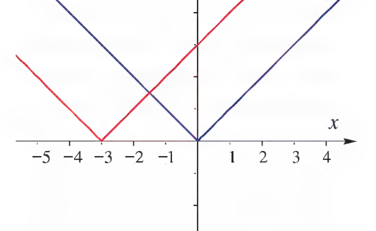
**3** **ارسم في المستوي الإحداثي نفسه، بيان الدالّة الأم $y=|x|$ ثم حدّد تحويلاً مناسبًا واستعمله لرسم بيان الدالّة المولّدة.**

أ $y=|x+3|$ ب $y=|x|+1$

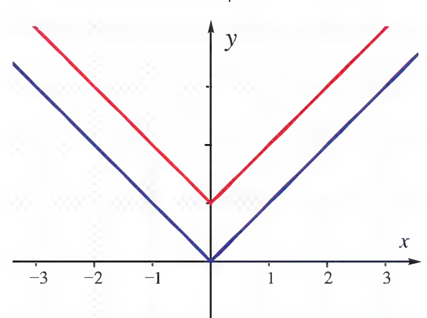


**الحـل**

أ من شأن إضافة 3 إلى المتغيّر $x$ في الدالّة الأم أن يسحب بيانها أفقيًّا 3 وحدات إلى اليسار.




ب من شأن إضافة 1 إلى المتغيّر $y$ في الدالّة الأم أن يسحب بيانها عموديًّا وحدة إلى الأعلى.




# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

**1** قدّرت جيهان أن دقيقة مرّت بعد 51 ثانية. وقدّر جميل أنها مرّت بعد 68 ثانية. أوضح كيف تقارن مقدار الخطأين.

**2** أعطِ مثالاً على عدد $b$ يحقّق $|b|=-b$. أوضح.

**3** صِف بيان دالّة المطلق.

**4** هل يمكن لمطلق عدد أن يكون سالبًا؟ أوضح.

**5** هل يمكن لمطلق عدد أن يساوي صفرًا؟ أوضح.

## تمارين موجّهة

**احسب.**

**6** $|5-12|$ **7** $|13-12|$ **8** $|-3-3|$ **9** $|4-4|$

**10** حدِّد مجال الدالّة ومداها، ثم ارسم بيانها.

أ $y=|x+1|$ ب $y=|x|+3$

**11** ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، بيان دالّة المطلق $y=|x|$، وبيان كل دالّة من الدوالّ الثلاث. حدِّد التحويل الهندسي الذي يسمح بالحصول على بيان الدالّة المولّدة انطلاقًا من بيان الدالّة الأم.

أ $y=|x+1|$ ب $y=|x|+1$ ج $y=-|x|+1$

## تمارين وتطبيقات

احسب مطلق كل عدد.

12 $17$ 13 $-33$ 14 $-7.11$ 15 $8.67$

16 $\frac{4}{3}$ 17 $-2.5$ 18 $-3\frac{5}{11}$ 19 $79.2$

احسب.

20 $|13-24|$ 21 $|0-3|$ 22 $|4-12|$ 23 $|1-11|$

24 $|0-(-3)|$ 25 $|1-27|$ 26 $|11-3|$ 27 $|-14-(-14)|$

28 $|-13+13|$ 29 $|-5-2|$ 30 $|5-(-3)|$ 31 $|-11-11|$

32 $|-5+(-5)|$ 33 $|0-5|$ 34 $|5-10|$ 35 $|-5-10|$

حدّد مجال كل دالّة ومداها.

36 $y=|x+4|$ 37 $y=|x-5|$ 38 $y=|x|+2$

39 $y=|x|-4$ 40 $y=-|x+4|$ 41 $y=-|x-5|$

42 $y=-|x|+2$ 43 $y=-|x|-4$ 44 $y=-4|x|$

45 $y=\frac{1}{2}|x|$ 46 $y=4|x|-1$ 47 $y=4|x-1|$

ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، بيان دالّة المطلق $y=|x|$ وبيان كل دالّة. حدّد التحويل الهندسي الذي يسمح بالحصول على بيان الدالّة المولّدة انطلاقًا من بيان الدالّة الأم.

48 $y=|x+4|$ 49 $y=|x-5|$ 50 $y=|x|+2$

51 $y=|x|-4$ 52 $y=-|x+4|$ 53 $y=-|x-5|$

54 $y=-|x|+2$ 55 $y=-|x|-4$

احسب $|a-b|$ وَ $|b-a|$ في التمارين من 56 إلى 59.

56 $a=5;\ b=3$ 57 $a=5;\ b=-3$

58 $a=-5;\ b=3$ 59 $a=3;\ b=5$

60 أيّ خلاصة تستنتج بالاعتماد على ما حسبته في التمارين من 56 إلى 59، فيما يخص $|a-b|$ وَ $|b-a|$ ؟

61 **تحويلات** اكتب الدالّة التي تتولّد من الدالّة الأم $y=|x|$ بالتحويل المبيّن.

أ سحب أفقي إلى اليسار 4 وحدات.

ب سحب عمودي إلى الأسفل وحدتان.

ج سحب إلى اليسار 5 وحدات، ثم سحب نحو الأسفل وحدتان.

د سحب إلى الأعلى 5 وحدات، ثم انعكاس حول المحور الأول.

هـ انعكاس حول محور السينات ثم سحب نحو الأعلى وحدتان.

**62** **كيمياء** ذكر أربعة تلاميذ كمّية الصوديوم التي وجدوها في 4 أكياس من الملح. حدّد خطأ كل تلميذ وخطأه المطلق، علمًا بأن الجواب الصحيح هو 8.2mg.

أ وجد أمين 8.2mg.

ب وجد ناجي 9.0mg.

ج وجد نديم 8.1mg.

د وجد باسم 8.4mg.

**أسفار** انطلق دانا بسيّارته من دهوك إلى خانقين. قاد دانا سيارته على الطريق السريعة بسرعة معدَّلها 140 كيلومترًا في الساعة ومرّ بعد 3 ساعات بكركوك. إذا رمز المتغيِّر $x$ إلى الزمن بالساعات منذ انطلاق دانا من دهوك، فإن المسافة بين سيّارته وكركوك هي $d = 140 \times |x - 3|$.

**63** كم كيلومترًا قطع دانا بعد ساعتين من انطلاقه؟ كم تكون المسافة بينه وبين كركوك في هذا الزمن؟

**64** كم كيلومترًا قطع دانا بعد 4 ساعات من انطلاقه؟ كم تكون المسافة بينه وبين كركوك في هذا الزمن؟

## نظرة إلى الوراء

**65** اكتب الأعداد الثلاثة التالية: 2؛ 6؛ 10؛ 14؛ 18؛ ؟ ، ؟ ، ؟ .

**66** مع هوشيار 6 آلاف دينار. كم صورة يستطيع أن يشتري إذا كان ثمن الصورة ألف دينار وربع الألف؟

**احسب.**

**67** $-3+4$ **68** $-3\times(0.3)$ **69** $-15-(-15)$ **70** $60 \div 5$

**71** $\sqrt[3]{125}$ **72** $-1.4-(-3)$ **73** $4\left(-1\frac{1}{2}\right)$ **74** $(-3.2)\div 4$

**75** ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، بيان كل دالّة. بِمَ تتشابه هذه المستقيمات وبِمَ تختلف؟

أ $y=x+2$ ب $y=\frac{3}{2}x-1$ ج $y=x$

**اكتب كل معادلة على صورة المَيل-التقاطع.**

**76** $3x+2y=1$ **77** $4x=2y$

**78** $4y=0$ **79** $2x-2y=17$

**حُلّ كل متباينة ومثِّل مجموع الحل على خط الأعداد.**

**80** $x+7\le 3$ **81** $x-3\ge 2$

**82** $x+15\le -1$ **83** $x-3>4$

## نظرة إلى الأمام

**84** يتم حساب المسافة بين نقطة الأصل والنقطة $(x, y)$ في المستوي الإحداثي باستعمال القاعدة $d=\sqrt{x^2+y^2}$ . احسب المسافة بين نقطة الأصل وكل نقطة.

أ $(3, 4)$ ب $(12, 5)$ ج $(-8, 6)$ د $(-15, -20)$

الدرس

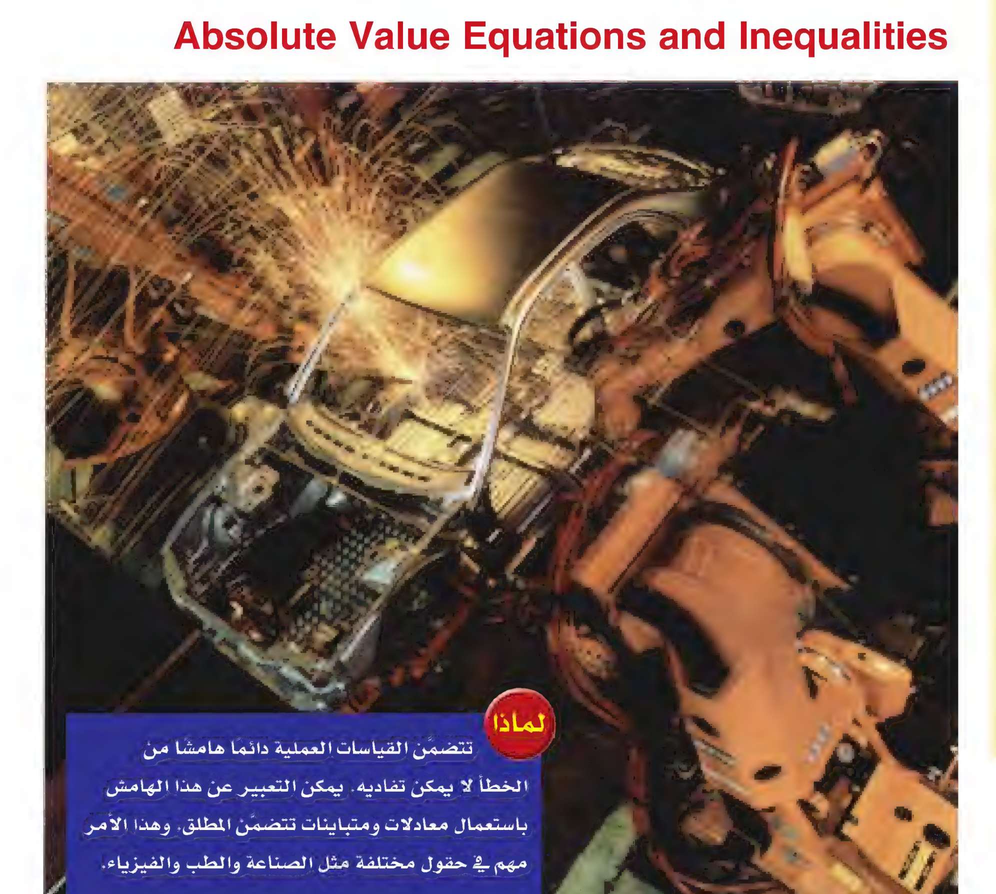
7

# معادلات ومتباينات تتضمَّن المطلق

# Absolute Value Equations and Inequalities

**الأهداف**

- يحلّ جبريًّا وبيانيًّا معادلات بسيطة تتضمَّن المطلق.
- يحلّ جبريًّا وبيانيًّا متباينات بسيطة تتضمَّن المطلق.
- يحلّ مسائل باستعمال المطلق.




**تطبيقات**
**صناعة**

تُنتج إحدى الشركات أقراصًا مسنَّنة تُستعمل في صناعة السيارات وفق مواصفات معيَّنة. إذا كان قطر القرص أكبر مما يجب فإن تركيبه سيكون مستحيلاً، وإذا كان أصغر فإن السيارة لن تسير بشكل سليم. ما هامش الخطأ المسموح به في قياس قطر القرص؟

## معادلات تتضمَّن المطلق — Absolute Value Equations

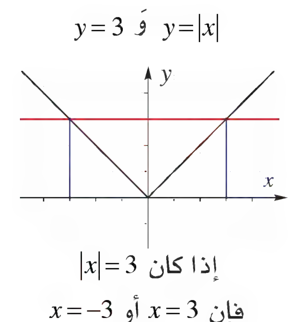
يساعد بيان دالة المطلق على فهم المعادلات التي تتضمَّن المطلق وعلى حلّها. أمعن النظر في الرسوم البيانية التالية:

$y=|x|$ وَ $y=2$

إذا كان $|x|=2$

فإن $x=2$ أو $x=-2$

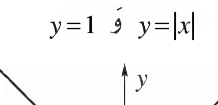
$y=|x|$ وَ $y=3$



إذا كان $|x|=3$

فإن $x=3$ أو $x=-3$

$y=|x|$ وَ $y=1$



إذا كان $|x|=1$

فإن $x=1$ أو $x=-1$

ما سبق يقودنا إلى استنتاج ما يلي:

**معادلة المطلق Absolute Value Equation**

تتكوَّن مجموعة حل المعادلة $|x|=a$ ، حيث $a$ عدد حقيقي موجب، من العددين $a$ و $-a$ .
تتكوَّن مجموعة حل المعادلة $|x|=0$ من العدد 0.
لا حلول للمعادلة $|x|=a$ عندما يكون $a$ عددًا حقيقيًّا سالبًا.

$|x|$ هو عدد غير سالب لأنه يُعبِّر، استنادًا إلى تعريفه، عن المسافة بين نقطة الأصل والنقطة ذات الإحداثيّ $x$ على خط الأعداد. لكنَّ المعادلات التي تتضمَّن المطلق قد تُؤدّي إلى حلول سالبة.

**نقطة مراقبة √** حُلَّ المعادلة $|x|=5$ .

**مثـــــال 1** حُلَّ المعادلة $|2x+3|=4$ ومثّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**الحــل**

تتحقَّق المعادلة $|2x+3|=4$ في حالتين:

$2x+3=4$ أو $2x+3=-4$

$2x=1$ أو $2x=-7$

$x=0.5$ أو $x=-3.5$

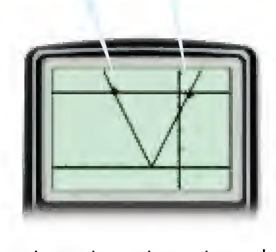
**تحقّق**

إذا كان $x=0.5$ فإن $|2x+3|=|2(0.5)+3|=|4|=4$

وإذا كان $x=-3.5$ فإن $|2x+3|=|2(-3.5)+3|=|-4|=4$

بإمكانك أيضًا أن تتحقَّق من الحل باستعمال الحاسبة البيانيّة.

ارسم بيان كل من الدالّتين $y=|2x+3|$ و $y=4$ في المستوي الإحداثيّ نفسه وحدِّد الإحداثيات الأولى لتقاطع هذين البيانين. سوف تجد أنهما يتقاطعان عند النقطة $(0.5, 4)$ وعند النقطة $(-3.5, 4)$ .




أما تمثيل مجموعة الحلول على محور الأعداد فهو:

−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4

**حــــاول** حُلَّ المعادلة $|3x+5|=7$ ، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

## النشاط

**استكشاف الحلول Exploring Solutions**



تمثِّل الصورة المقابلة بيان كل من الدالّتين $y=|x|$ و $y=2x-2$ ، مما يمثّل الحلّ البيانيّ للمعادلة $|x|=xm+n$ حيث $m=2$ و $n=-2$ .

1. ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، بيانيَ الدالتين $y=|x|$ و $y=2x-2$ . ما عدد نقاط التقاطع؟ حدِّدْ بيانيًّا حلّ المعادلة.

**خمِّن وتحقَّق:** فكّر في عدد حلول المعادلة $|x|=y=mx+n$ . نحن نساعدك.

2. حاول أن تجد قيمة للمتغيِّر $m$ وأخرى للمتغيِّر $n$ بحيث يتقاطع بيانا الدالتين $y=mx+n$ وَ $y=|x|$ . في نقطتين. تحقَّق بيانيًّا من حسن اختيارك واكتب حلّ المعادلة $|x|=mx+n$ .
3. حاول أن تجد قيمة للمتغيِّر $m$ وأخرى للمتغيِّر $n$ بحيث لا يتقاطع بيانا الدالتين $y=mx+n$ وَ $y=|x|$ . تحقَّق بيانيًّا من حسن اختيارك.
4. حاول أن تجد قيمة للمتغيِّر $m$ وأخرى للمتغيِّر $n$ بحيث يتقاطع بيانا الدالتين $y=mx+n$ وَ $y=|x|$ في عدد غير محدّد من النقاط. تحقَّق بيانيًّا من حسن اختيارك.
5. لخِّص، استنادًا إلى ما تقدَّم، عدد الحلول الممكنة للمعادلة $|x|=mx+n$ .

## مثال 2

حُلَّ المعادلة $|x-3|=3x+5$ .

**الحل**

$|x-3|=3x+5$ .

| | | |
|---|---|---|
| $x-3=3x+5$ | أو | $x-3=-(3x+5)$ |
| $2x=-8$ | أو | $4x=-2$ |
| $x=-4$ | أو | $x=-0.5$ |

**تحقَّق**

| $x=-4$ | $x=-0.5$ |
|---|---|
| $\|-4-2\|\stackrel{?}{=}3(-4)+5$ | $\|-0.5-3\|\stackrel{?}{=}(3(-0.5)+5)$ |
| $\|-7\|\stackrel{?}{=}3(-4)+5$ | $\|-3.5\|\stackrel{?}{=}-1.5+5$ |
| $7\stackrel{?}{=}-7$ خطأ | $3.5\stackrel{?}{=}3.5$ صواب |

الحلّ $x=-4$ مرفوض لأنه أدّى إلى الخطأ «$7=-7$» ، في حين أن الحل الآخر $x=-0.5$ مقبول.

بإمكانك التحقّق من النتيجة بيانيًّا. ارسم، في المستوي الإحداثيّ نفسه، بيان كلّ من الدالّتين $y=|x-3|$ وَ $y=3x+5$ تحصل على الرسم المقابل.

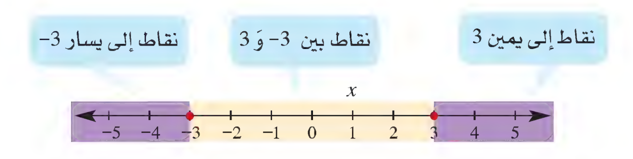



$(-0.5, 3.5)$

**حاول** حُلَّ المعادلة $|x-4|=x+1$ .

## متباينات تتضمَّن المطلق Absolute Value Inequalities

تمثِّل النقطتان 3 وَ $-3$ مجموعة حلول المعادلة $|x|=3$ على محور الأعداد. إنهما تقسمان هذا المحور إلى ثلاثة أقسام:



### متباينة المطلق Absolute Value Inequality

تتكوّن مجموعة حلّ المتباينة $|x|<a$ ، حيث $a$ عدد حقيقي موجب، من الأعداد الحقيقية $x$ التي تحقّق $-a<x<a$ .

تتكوّن مجموعة حلّ المتباينة $|x|>a$ ، حيث $a$ عدد حقيقي موجب، من الأعداد الحقيقية $x$ التي تحقّق $x<-a$ أو $x>a$ .

تتكوّن مجموعة حلّ المتباينة $|x|>a$ ، حيث $a$ عدد حقيقي سالب، من جميع الأعداد الحقيقية.

مجموعة حل المتباينة $|x|<a$ ، حيث $a$ عدد حقيقي سالب، هي المجموعة الخالية.

لا حلول للمتباينة $|x|<a$ عدد حقيقي غير موجب.

يمكنك أن تصوغ مبادئ مشابهة بشأن المتباينتين $|x|\geq a$ وَ $|x|\leq a$ .

**مثال 3** **حُلّ المتباينة $|5-3x|>9$ ومثّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد.**

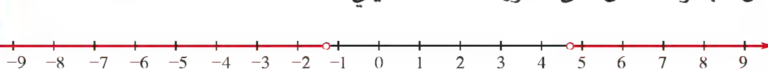
(4.67, 9)

(−1.33, 9)

الحل

| | | |
|---|---|---|
| $|5-3x|>9$ | | (المتباينة هي من النوع $|x|>a$) |
| $5-3x>9$ | أو | $5-3x<-9$ |
| $-3x>4$ | أو | $3x<-9-5$ |
| $x<-\frac{4}{3}$ | أو | $x>\frac{14}{3}$ |

مثل مجموعة الحلّ على محور الأعداد كما يلي:



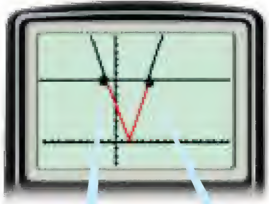

**تحقَّق**

تحقق من الإجابة بيانيًّا. ارسم، في المستوي الإحداثيّ نفسه، بيان $y=9$ وبيان $y=|5-3x|$ .
يبيّن الرسم أنه إذا كان $x<-\frac{4}{3}\approx-1.33$ ، أو $x>\frac{14}{3}\approx 4.67$ ، فإن النقطة ذات الإحداثيّ الأول $x$ على بيان $y=|5-3x|$ هي أعلى من النقطة ذات الإحداثيّ الأول $x$ على بيان $y=9$ . ممّا يثبت أن الإحداثيّ الثاني للأولى ($|5-3x|$) أكبر من الإحداثي الثاني للثانية (9).

**تفكير ناقد** لماذا تغيّر اتجاه التباين في حلّ التمرين السابق؟

**حاولْ** حُلّ المتباينة $|3x-7|>1$ ومثّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد.

**مثال 4** **حُلّ المتباينة $|5-3x|<9$ ومثّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد.**



(−1.33, 9) (4.67, 9)

الحل

| | | |
|---|---|---|
| $|5-3x|<9$ | | (المتباينة هي من النوع $|x|<a$) |
| $5-3x<9$ | وَ | $5-3x>-9$ |
| $-3x<4$ | وَ | $-3x>-14$ |
| $x>-\frac{4}{3}$ | وَ | $x<\frac{14}{3}$ |

مثّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد كما يلي:

−9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**تحقّق**

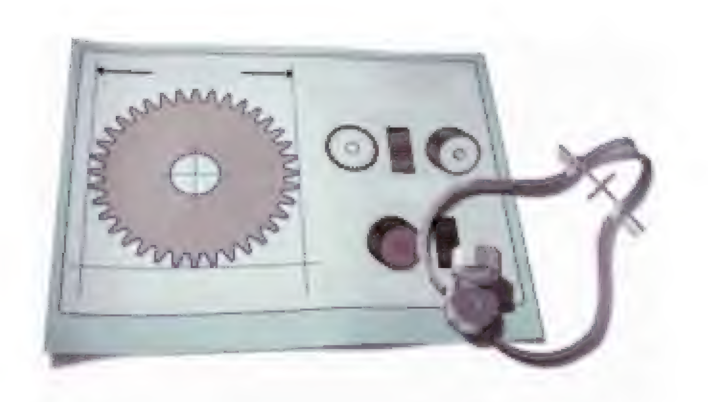
يبيِّن المثال السابق أنه إذا كان $-\frac{4}{3} < x < \frac{14}{3}$ ، فإن النقطة ذات الإحداثيّ الأول $x$ على بيان الدالّة $y = |5 - 3x|$ هي أدنى من النقطة ذات الإحداثيّ الأول $x$ على بيان الدالّة $y = 9$ ممّا يثبت أن الإحداثيّ الثاني للأولى ($|5 - 3x|$) أصغر من الإحداثيّ الثاني للثانية (9).

**نقطة مراقبة √** قارنْ بين المتباينتين في المثالين. أوضح ذلك.

## مثـــــال 5

**تطبيقات**
**صناعة**

اكتب متباينة تتضمَّن المطلق لتحديد هامش الخطأ المقبول في قياس قطر القرص المسنَّن المذكور في أوّل الدرس، علمًا أن قطر القرص يجب أن يكون 3.5 مع هامش خطأ $\pm 0.01$ .

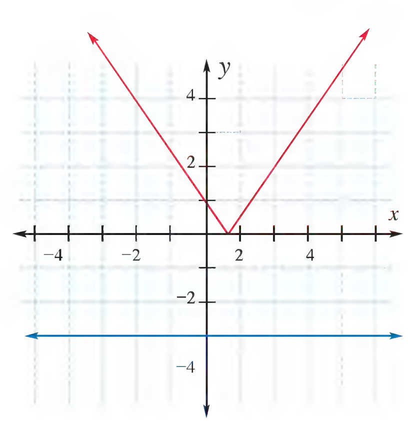


**الحل**

يرمز $d$ إلى قطر القرص المسنَّن. ينبغي أن يحقِّق هذا المتغيِّر الشرط $3.5 - 0.01 \leq d \leq 3.5 + 0.01$ ، أي $-0.01 \leq d - 3.5 \leq 0.01$

تحدِّد المتباينة $|d - 3.5| \leq 0.01$ هامش الخطأ المقبول.

**حــاول** اكتب $12.00 - 0.01 \leq a \leq 12.00 + 0.01$ على صورة متباينة تتضمَّن المطلق.




هناك متباينات تتضمَّن المطلق لا حلول لها. كما أن هناك متباينات أخرى مجموعة حلّها تكون مجموعة الأعداد الحقيقية كلها. فالمتباينة $|2x - 1| < -3$ لا حلول لها، لأن العدد $|2x - 1|$ لا يمكن أن يكون أصغر من عدد سالب.

من ناحية أخرى، تبيِّن الصورة المقابلة أن كل عدد حقيقي هو حلّ للمتباينة $|2x - 1| > -3$ ، وبالتالي فإن مجموعة حلّ هذه المتباينة هي مجموعة الأعداد الحقيقيّة كلّها.

**نقطة مراقبة √** اكتب متباينة تتضمَّن المطلق والرمز $\geq$ ، وتكون بلا حلول.
اكتب متباينة أخرى تتضمَّن المطلق والرمز $\leq$ ، وتكون مجموعة حلّها مجموعة الأعداد الحقيقية.

**تفكير ناقد** إذا كانت المتباينة $|x| \leq a$ بلا حلول، فماذا تقول عن القيَم المكنة للعدد $a$، وعن مجموعة حل المتباينة $|x| > a$ ؟

# التمـــــــاريـــــــن

## التواصل في الرياضيات

1 هل للمعادلة $|3x-5|+4=3$ حلول؟ أوضح.

2 أوضح لماذا عليك التحقُّق من صحّة الحلّ في كل مرّة تحلّ فيها معادلة تتضمَّن المطلق.

3 أوضح لماذا قد يكون لمعادلة تتضمَّن المطلق حلاّن.

4 استعمل التمثيل البياني لتشرح كيف يمكن لمجموعة الحلّ لمتباينة تتضمَّن المطلق أن تساوي مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

## تمارين موجَّهة

**حُلَّ المعادلة وتحقَّق من الحل.**

5 $|x-10|=4$ 6 $|2x-5|=3$ 7 $10=|7-3x|$

8 $x+4=|x-2|$ 9 $\frac{1}{2}x+1=|x-2|-1$ 10 $\frac{1}{2}x+1=|x+3|$

**حُلَّ المتباينة. مثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

11 $2<|x-4|$ 12 $|2x+1|\geq 5$ 13 $|x+5|<\frac{1}{2}$

14 $\frac{1}{2}|2x+1|\geq 2$ 15 $3|x+1|\leq 2$ 16 $3|x+1|+3>2$

17 رمى آرام حذوة حصان ليصيب هدفًا يبعد 9 أمتار. وقعت الحذوة على بعد يقل عن 60cm الهدف.

أ اكتب متباينة تتضمَّن المطلق تعبِّر عن المسافة التي قطعتها الحذوة.

ب حُلَّ هذه المتباينة ومثِّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد.

## تمارين وتطبيقات

18 **ارسم خطًا يصل كل معادلة أو متباينة إلى اليمين بحلّها إلى اليسار:**

| | |
|---|---|
| $\lvert x+2\rvert=4$ | $-6<x<2$ |
| $\lvert x+2\rvert<4$ | $x=-6$ أو $x=2$ |
| $\lvert x+2\rvert<-4$ | $x<-6$ أو $x>2$ |
| $\lvert x+2\rvert>-4$ | الحل غير مذكور |
| $\lvert x+2\rvert>4$ | مجموعة الحلّ هي مجموعة الأعداد الحقيقية |
| $\lvert x+2\rvert=-4$ | |

**حُلَّ كل معادلة.**

19 $|x+4|=8$ 20 $|x-5|=12$ 21 $|2+x|=10$

22 $|8-x|=1$ 23 $|x-2|=9$ 24 $|x+5|=1$

25 $|2x-15|=11$ 26 $|3x+12|=18$ 27 $|10-4x|=28$

28 $|5+4x|=17$ 29 $|5x-6|=2$ 30 $|10-3x|+5=\frac{1}{2}$

31 $|10x+2|-18=120$ 32 $|4-3x|-9=3$ 33 $|2x-8|+2=1$

**حُلَّ كلّ متباينة.**

| | | |
|---|---|---|
| **34** $\|x-4\|>1$ | **35** $\|x+5\|\le 7$ | **36** $\|3x\|>15$ |
| **37** $\|-2x\|\le 12$ | **38** $\|4x\|\le -8$ | **39** $\|3-x\|\ge -5$ |
| **40** $\|2+5x\|\le 3$ | **41** $\|2x-3\|<11$ | **42** $\|4x+6\|\le 14$ |
| **43** $\left\|\frac{2x+3}{-5}\right\|<3$ | **44** $\|4x-5\|\ge 15$ | **45** $\|2x-1\|\ge -5$ |
| **46** $\|5x+3\|>-2$ | **47** $\|7-6x\|<-4$ | **48** $\|9x+4\|\le -11$ |
| **49** $-2\|4x+1\|\le -4$ | **50** $-2\|4x+2\|\ge -4$ | **51** $\left\|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right\|<-7$ |

**خلاصة**

**يمكنك التعبير عن متباينة تتضمن المطلق بثلاثة أشكال**

| لفظي | جبري | بياني |
|---|---|---|
| المسافة بين $x$ وَ 3 أقلّ من 5. | $\|x-3\|<5$ | خط أعداد: −4، −2، 0، 2، 3، 4، 6، 8 |

**اكتب الصورتين الناقصتين، في التمارين من 52 إلى 54.**

**52** المسافة بين $x$ وَ 7 أقلّ من 4.

**53** $|x-4|<1$

**تحدٍّ**

**54** خط أعداد: 2، 4، 6، 8، 10، 12، 14

**تطبيقات**

**55** حُلَّ المتباينة $\left|\frac{4x}{3}\right|\le 2x+5$ ومثِّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد.

**اكتب متباينة تتضمّن المطلق تعبّر عن المسألة في كلٍّ من التمرينين 56 و57، ثم اكتب حلّها.**

**56** يزن رزكار 60kg. غير أن طبيبه يقول إن هذا الوزن يبتعد عن الوزن المثالي بنسبة 5%. ما القيَم المقبولة لوزن رزكار.

**57** أعلن أحد معاهد الإحصاء أن 68% من مشاهدي الأفلام السينمائية يأكلون الفشار خلال مشاهدتهم الفيلم. حدِّد النسب المئوية القصوى والدنيا للأشخاص الذين يأكلون الفشار خلال مشاهدتهم فيلمًا سينمائيًّا، علمًا بأن ما أعلنه المعهد يحتمل الخطأ بنسبة 3%.

## نظرة إلى الوراء

**حُلَّ كلّ معادلة.**

**58** $\frac{2}{x}=\frac{4}{5}$    **59** $\frac{x-3}{4}=\frac{2x}{16}$    **60** $\frac{10x}{-60}=\frac{2x-10}{8}$

**61** حُلَّ المعادلة $P=2\ell+2w$ حاسبًا المتغيِّر $\ell$ بدلالة المتغيِّرات الأخرى.

**حُلَّ المتباينة ومثِّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد.**

**62** $4x-5<\frac{1}{3}(8x+3)$    **63** $x-9\ge\frac{1}{6}(21+x)$

**حُلَّ المتباينة المركَّبة ومثِّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد.**

**64** $(x>2)\wedge(x\le -1)$    **65** $(x\le -2)\vee(x>-4)$

## نظرة إلى الأمام

**66** ارسم بيان الدالّة $f(x)=(x-3)(x+2)$ وتحديد تقاطعه مع المحور الأول. قارن بين عاملي الحدودية التي تُعرّف الدالّة وتقاطعاتها مع المحور الأول.







# نفايات الفضاء

قام الإنسان منذ العام 1957 بآلاف المهمات في الفضاء ما بين إرسال أقمار صناعية أو القيام برحلات. تركت هذه المهمات ملايين النفايات في الفضاء القريب من الأرض. يطرح وجود هذه النفايات المختلفة الحجوم ضرورة أخذها في الاعتبار عند القيام بمهمات جديدة. إذا كانت النفايات الصغيرة لا تشكّل خطرًا على المهمات الجديدة، فإن النفايات الأكبر حجمًا قد تشكّل مثل هذا الخطر. لذا، كان من الضروري إنشاء سجلّات بهذه النفايات والمعطيات عنها، وتحديث هذه المعطيات بشكل دائم.

يبيّن الجدول المقابل الأعداد التقديريّة لهذه النفايات من أقمار صناعية وشظايا ما بين العامين 1965 وَ 1990، مقسّمة على فترات من 5 سنوات.

جدول بنفايات الفضاء

| السنة | الأقمار | الشظايا |
|---|---|---|
| 1965 | 175 | 900 |
| 1970 | 350 | 1850 |
| 1975 | 525 | 2250 |
| 1980 | 700 | 2600 |
| 1985 | 875 | 3200 |
| 1990 | 1050 | 2900 |



## النشـاط 1

**1** استعمل معطيات الجدول السابق لحساب معدَّل التغيُّر في عدد الأقمار بين سنة 1965 وسنة 1990. احسب هذا المعدَّل خلال فترات السنوات الخمس. قارن بين هذه المعدّلات وبين معدَّل التغيُّر على مجمل الفترة بين 1965 وَ 1990.

**2** أنشئ نموذجًا رياضيًّا على صورة دالّة خطّية لمجمل المعطيات حول الأقمار. ارمز بالمتغيِّر $x$ إلى السنوات معتبرًا سنة الصفر سنة 1965. تحقَّق من نموذجك باستعمال معطيات الجدول.

## النشـاط 2

**1** مثِّل بيانيًّا معطيات الجدول العائدة إلى الشظايا آخذًا المحور الأول لتمثيل السنوات (صفر لتمثيل السنة 1965) والمحور الثاني لتمثيل عدد الشظايا.

**2** أنشئ الرسم البياني الذي تراه أنسب، لتمثيل عدد الشظايا على مرّ السنين. اشرح المنوال الذي تستخلصه من هذا الرسم البياني. هل تعتقد أن النموذج الذي حصلت عليه يسمح لك بإجراء تقديرات مستقبلية يمكن الركون إليها؟ أوضح ذلك.

## النشـاط 3

**1** استعمل الرسم البياني المقابل، الذي يبيِّن توزيع النفايات الفضائية وفق الارتفاع، لتوضح كيف يتغيَّر عددها بتزايد الارتفاع.

**2** لاحظ أن بيان الدالّة التي تحدِّد عدد النفايات بدلالة الارتفاع يتكوَّن من قطع مستقيمة، مما يدلّ على أن قاعدة هذه الدالّة تتغيَّر بتغيُّر فترات الارتفاع، وأنها خطّية في كل فترة. حدِّد هذه الفترات وحدِّد معادلة القطعة المستقيمة العائدة إلى كل فترة.

**3** استعمل المعادلات التي توصَّلت إليها لتقدير عدد النفايات على ارتفاع 725km، ثم على ارتفاع 2100km. وناقش فائدة النموذج الذي حصلت عليه.

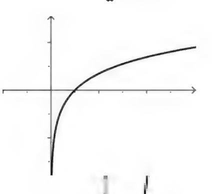




# مراجعة

**هل يمثّل الرسم البياني دالّة؟**

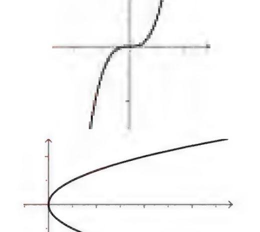
1



2



3



4 هل يمثِّل الجدول المقابل دالّة؟

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 1 | -2 |
| 0 | 0 |
| 2 | -5 |
| 3 | 6 |

**حدِّد مجال الدالّة ومداها.**

5 $f(x)=3x^2-2x+1$

6 $f(x)=11x-2$

7 $f(x)=3x^2-2$

8 $f(x)=2-3x$

**علم نفس** يحدِّد علماء النفس مؤشِّر الذكاء عند شخص ما عن طريق حساب نسبة عمره الذهني إلى عمره الزمني، وضرب هذه النسبة بالعدد 100، ثم تقريب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

9 احسب مؤشِّر الذكاء لشخص عمره الزمني 15 عامًا عندما يكون عمره الذهني على التوالي: 10، 14، 15، 18، 25 عامًا.

10 عبِّر عن العلاقة بين العمر الذهني ومؤشِّر الذكاء لهذا الشخص بواسطة جدول ورسم بياني وقاعدة.

11 هل العلاقة بين العمر الذهني ومؤشِّر الذكاء دالّة؟

12 أي دالّة ليست خطّية؟

أ $f(x)=-2x+1$ ب $f(x)=11x-2$

ج $f(x)=3x^2-2$ د $f(x)=2-3x$

**اكتب معادلة مستقيم، في التمارين من 13 إلى 18:**

13 ميله $-3$ ويمرّ بالنقطة $(5, 8)$.

14 ميله 0 ويمرّ بالنقطة $(-5, 4)$.

15 يمرّ بالنقطتين $(3, 4)$ وَ $(5, 4)$.

16 يمرّ بالنقطتين $(6.8, 2)$ وَ $(3.6, 6)$.

17 يمرّ بالنقطة $(4, -1)$ ويتعامد مع المستقيم $y=-3x-5$.

18 يمر بالنقطة $(-3, -2)$ ويوازي المستقيم $y=3.6x-5$.

**اكتب معادلة كل مستقيم على الصورة العامة.**

19 $y+9=4x-8$

20 $3x+y+6=9$

**حُلّ بيانيًا النظام الخطّي.**

21 $\begin{cases} x+6y=3 \\ 3x+y=-8 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 8x+6y=2 \\ x+2y=-3 \end{cases}$

23 أنشئ بيان الدالّة $f(x)=\frac{1}{2}|x|+1$ .

24 ما التحويلات التي تولِّد الدالّة $f(x)=-|x+2|-3$ من الدالّة الأم؟

**حُلّ المعادلة.**

25 $\left|\frac{1}{2}x\right|=20$

26 $12|2x|=108$

27 $\frac{3}{2}|x+4|-5=22$

**حُلّ المتباينة.**

28 $\left|\frac{1}{2}x\right|>20$

29 $-5|6x-7|\leq 35$

30 $|6x-7|\leq -35$

**هندسة** في المثلّث $30-60-90$ ، تكون العلاقة بين طول القطر $d$ وطول الضلع $s$ المواجه للزاوية $30^\circ$ علاقة طردية أي إن نسبة الأول إلى الثاني لا تتغيّر.

31 حدِّد هذه النسبة علمًا بأن طول الوتر يبلغ 45 عندما يكون طول الضلع 22.5 .

32 اكتب $d$ بدلالة $s$.

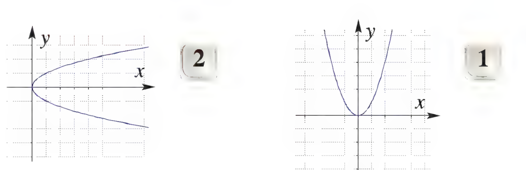
33 احسب قيمة $s$ عندما يكون $d=13\text{cm}$ .




# اختبار الفصل

**اذكر إن كان الرسم البياني يمثّل دالّة.**

**1** **2**




**احسب قيمة كل دالّة عندما يتّخذ $x$ القيم −2 وَ 0 وَ 2 على التوالي.**

**3** $f(x)=5x^2-4x+7$

**4** $f(x)=x^2+x-4$

**5** **استهلاك** حدّدت إدارة جامعة كوردستان رسوم التسجيل على الشكل التالي: 480 ألف دينار كرسم انتساب وَ 900 ألف دينار عن كل مقرّر يتسجّل فيه الطالب. اكتب دالّة تمثّل كلفة تسجيل طالب في $x$ مقرّرًا. ما كلفة التسجيل في 3 مقرّرات؟

**6** **تجارة** تتقاضى ورشة الصالح لتصليح السيارات 50 ألف دينار لتكوين ملف للسيارة والقيام بتشخيص العطل وَ 45 ألف دينار عن كل ساعة يقضيها العامل في تصليح السيارة. اكتب دالّة خطيّة تبيّن كلفة تصليح سيارة بدلالة عدد ساعات التصليح.

**أنشئ بيان كل دالّة.**

**7** $y=2x$ **8** $y=2x+5$

**9** $y=1$ **10** $x=2$

**اكتب معادلة على صورة الميل-التقاطع لكل مستقيم.**

**11** ميله 2 ويمرّ بالنقطة $(-1, 5)$ .

**12** ميله 0 ويمرّ بالنقطة $(-5, 7)$ .

**13** يمرّ بالنقطة $(3, 5)$ و بالنقطة $(4, -7)$ .

**14** يوازي المستقيم $y=4x+3$ ويمرّ بالنقطة $(1, 2)$ .

**15** يمرّ بالنقطة $(-5, 9)$ ويتعامد مع المستقيم $2x+3y=4$ .

**16** **خرائط** نظرت سارا إلى خريطة للجزيرة العربية مقياس رسمها $\frac{1}{5\,000\,000}$ . قاست سارا المسافة على الخريطة بين المدينة المنوّرة وجدّة فوجدتها 8.4cm . ما المسافة بين المدينتين على الأرض؟

**مثّل بيانيًا كل نظام وحدّد نوعه (مستحيل أو محدّد أو غير محدّد).**

**17** $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=-8 \end{cases}$ **18** $\begin{cases} 4x+2y=24 \\ 2x-12=-y \end{cases}$

**19** $\begin{cases} \frac{1}{3}x-y=4 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$ **20** $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ y+\frac{4}{3}x=-7 \end{cases}$

**21** **هندسة** مجموع زاويتين متتامتين 90 درجة. ما قياس كل من الزاويتين إذا زاد قياس إحداهما 30 درجة عن الأخرى؟

**حُلّ بيانيًا كل نظام.**

**22** $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=x-2 \end{cases}$ **23** $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$

**حُلّ كل معادلة.**

**24** $|3x+1|=4$ **25** $|5x-7|=7$

**26** $\left|\frac{1}{2}x-4\right|=3$ **27** $|x-5|=2$

**حُلّ كل متباينة.**

**28** $|5x+3|\geq -2$ **29** $|2x+13|\leq -3$

**30** $\left|\frac{3}{5}x+6\right|\geq 9$ **31** $\left|\frac{3}{2}x+8\right|<3$

**حدّد التحويل الهندسي الذي يُحوّل بيان الدالّة الأم $y=|x|$ إلى بيان كل دالّة.**

**32** $y=|x-3|$ **33** $y=|x+5|$

**34** $y=|x|+2$ **35** $y=|x|-3$

**حُلّ بيانيًا.**

**36** $|x-5|+3=0$

**37** $|x+4|=5$

**38** $|x+13|\leq -3$

# 2 اختبار تراكمي

**1** ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-1, -4)$ وَ $(3, 8)$؟

أ $y=\frac{1}{2}x+7$ ب $y=-\frac{1}{3}x+9$

ج $y=3x-1$ د $y=-3x-7$

**2** ما معادلة المستقيم المتعامد مع المستقيم $y=5x-3$، والمار بالنقطة $(10, 3)$؟

أ $y=-\frac{1}{5}x+5$ ب $y=-\frac{1}{5}x-3$

ج $y=-5x-3$ د $y=-5x-5$

**3** أيّ ممّا يلي يصف تحويل بيان دالّة المطلق إلى بيان الدالّة $f(x)=-|x-2|$ ؟

أ سحب أفقي مداه 2 نحو اليمين، ثم انعكاس حول المحور الثاني.

ب سحب أفقي مداه 2 نحو اليمين، ثم انعكاس حول المحور الأول.

ج سحب أفقي مداه 2 نحو اليسار، ثم انعكاس حول المحور الثاني.

د سحب أفقي مداه 2 نحو اليسار، ثم انعكاس حول المحور الأول.

**4** أعطِ مثالاً على علاقة لا تشكّل دالّة واشرح لماذا.

**5** أي دالّة ليست دالّة خطيّة؟

أ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{2}$ ب $y=\frac{3-4x}{7}$

ج $y=\frac{7}{3-4x}$ د $y=3-x$

**6** أيّ مما يلي يعطي مَيل المستقيم $2x+3y=2$ وتقاطعه مع المحور الثاني؟

أ $-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$ ب $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}$

ج $-2; 2$ د $2; -2$

**7** ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2,-1)$ وَ $(-5, 0)$.

أ $-7$ ب $-3$

ج $\frac{1}{7}$ د $-\frac{1}{7}$

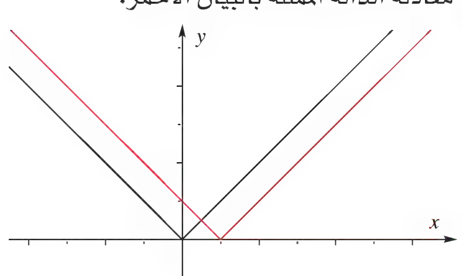
**8** أيّ معادلة تمثِّل مستقيمًا لا يقطع المحور الثاني؟

أ $y=4$ ب $x=-4$

ج $x+y=2$ د $y=3x$

**9** حُلَّ المعادلة $|2+3x|=14$ .

**10** ما معادلة الدالة المثلة بالبيان الأحمر؟




**11** حُلَّ المتباينة $|2+3x|\geq 14$ .

**12** أي مستقيم يوازي المستقيم $y=-2x-3$ ؟

أ $y=-2x+2$ ب $y=2x-2$

ج $y=2x+2$ د $y=-0.5x-2$

**13** اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-3, 6)$ وَ $(-5, 8)$ .

**14** ما تقاطع المستقيم $3x-5y=2$ مع المحور الثاني؟

**15** حدِّد مَيل المستقيم $3x-5y=2$ وارسمه.

**16** ما مدى الدالّة $f(x)=-\left(\frac{x}{3}\right)^2$ ؟

**17** هل النظام الخطّي $\begin{cases} 3y=4x-1 \\ x=\frac{4}{3}y \end{cases}$ محدّد أم مستحيل أم غير محدَّد؟

**18** اكتب معادلة الدالّة المولَّدة من الدالّة $y=|x|$ بسحب عمودي نحو الأعلى مداه 2.

## الفصل الثالث

# الدوالّ التربيعيّة

الفصل

3

# الدوال التربيعية

## Quadratic Functions

كان كتاب **الجبر والمقابلة** للعالم الإسلامي محمد بن موسى الخوارزمي من أوائل الكتب التي تناولت الجبر. وقد أورث هذا الكتاب العالم كلمة الجبر التي تُستعمل في مختلف لغات العالم مع بعض التحوير في اللفظ. استعمل الخوارزمي كلمة «الجبر» في تعامله مع المعادلات بهدف حلّها. فجبر المعادلة بالنسبة إليه كان يعني زيادة العدد نفسه على طرفي المعادلة لتحرير المجهول وتحديد قيمته. وقد استعان الخوارزمي بعلم الجبر للقيام بأبحاثه العلمية في ميادين الجغرافيا وعلم الفلك.



كان الإسطرلاب من أوائل الأدوات التي استعملها العلماء لدراسة مواقع النجوم.

### الدروس



صفحات من
كتاب الخوارزمي
عن الجبر

## حول مشروع الفصل

رأيت ولا شك العديد من الحالات التي تُستعمل فيها دالّة تربيعيّة لإنشاء نموذج رياضي يهدف إلى دراسة حالة من الواقع. سوف تستكشف من خلال مشروع الفصل ما يربط بين الدوال التربيعيّة والفروق بين عدد ولاحقه في نمط عددي.

بعد انتهائك من مشروع الفصل، سوف تصبح قادرًا على:

- استعمال طريقة الفروق المنتهية لتحديد قاعدة دالّة.




# الدوال التربيعيّة Quadratic Functions



**لماذا؟** يمكنك تمثيل الكثير من حالات الحياة اليوميّة بمقادير تربيعيّة. مثال ذلك: المسافة التي تقطعها سيارة يكبحها سائقها بدءًا من ملاحظة السائق لعائق أمامه وحتى التوقّف النهائي.

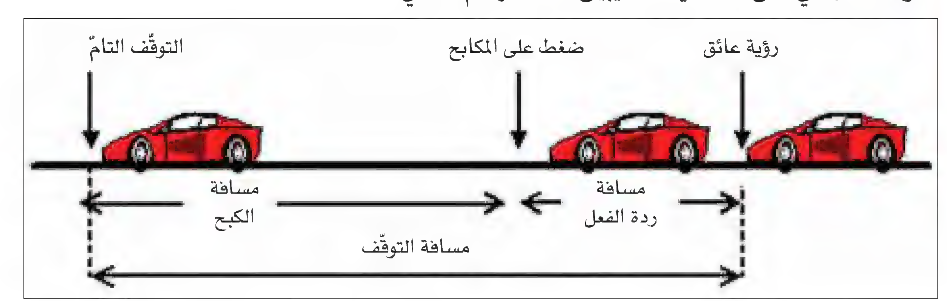
**الأهداف**

- يُميّز الدالّة التربيعية $f(x)=ax^2+bx+c$ ويمثّلها بيانيًّا.
- يمثّل الدالّة التربيعية بيانيًّا، ويستعمل اسم بيانها (القطع المكافئ)
- يميّز رأس القطع المكافئ ومحوره.
- يحدّد بيانيًّا تزايد الدالّة وتناقصها.
- يحدّد وجهة انفتاح القطع المكافئ وفقًا لإشارة المعامل A.

**تطبيقات**
فيزياء

## المقادير التربيعيّة Quadratic Expressions

تتألّف المسافة التي تقطعها سيارة يكبحها سائقها، بدءًا من ملاحظة السائق لعائق أمامه وحتى التوقّف النهائي، من مسافتين كما يبيّن ذلك الرسم التالي:




يمكنك التعبير عن المسافة التي تحتاج إليها السيارة للتوقّف بواسطة المقدار الجبري: $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ ، حيث يمثّل المتغيّر $x$ سرعة السيارة عند رؤية العائق (بالكيلومترات في الساعة) وَ $d(x)$ مسافة التوقّف النهائي (بالأمتار).




يتكوّن المقدار $d(x)$ من مجموع المقدار $\frac{1}{5}x$ الذي يمثّل مسافة ردّة الفعل والمقدار $\frac{1}{160}x^2$ الذي يمثّل مسافة الكبح. إذا أنشأت جدول قيم للمقدار $d(x)$ باستعمال حاسبة بيانيّة فإنك تلاحظ أن المسافة اللازمة للتوقّف هي 25m تقريبًا عندما تكون السرعة 50km/h ، و 82m تقريبًا عندما تكون السرعة 100km/h .
وهكذا تلاحظ أن المسافة اللازمة للتوقّف تضاعفت أكثر من 3 أمثال في حين السرعة تضاعفت مرتين.

**تفكير ناقد**

هل العلاقة بين السرعة $x$ ومسافة التوقف $d$ علاقة خطّية؟ أوضح ذلك.

## المقاديرالتربيعيّة Quadratic Expressions

**المقادير التربيعيّة** هي المقادير التي تُكتب على الشكل $ax^2+bx+c$ حيث $a$ وَ $b$ وَ $c$ أعداد حقيقيّة $a \neq 0$ . تُدعى الأعداد $a$ وَ $b$ وَ $c$ **معاملات** ***Coefficients*** المقدار التربيعي.

أبسط المقادير التربيعيّة هو المقدار $x^2$ . بصورة عامة، إذا ضربت مقدارًا خطّيًّا في مقدار خطّي آخر تحصل على مقدار تربيعي كما يبيّن ذلك النشاط التالي:

### النشاط 1

### المقادير التربيعيّة والمقادير الخطيّة Quadratic and Linear Expressions

1. أكمل الجدول التالي:

| المقدار الأول | المقدار الثاني | ناتج ضرب المقدارين |
|---|---|---|
| $2x-2$ | $2x+1$ | $(2x-2)(2x+1)=4x^2-2x-2$ |
| $x+1$ | $x+1$ | |
| $2x$ | $-2x+1$ | |
| $-x+2$ | $0.5x+1$ | |

2. حدِّد معاملات المقدار التربيعي في كل حالة من السؤال السابق.
3. اضرب المقدار $(mx+n)$ في المقدار $(px+q)$ واكتب الناتج على صورة مقدار تربيعي. حدِّد معاملات المقدار الناتج بدلالة $m$ وَ $n$ وَ $p$ وَ $q$.

نقطة مراقبة √

## الدوال التربيعيّة Quadratic Functions

تعلّمت في الفصل الثاني الدوال الخطّية. سوف تتعلم في هذا الفصل نوعًا جديدًا من الدوال هو **الدوال التربيعية**. تذكّر أن الصورة العامة للدالّة الخطّية هي $f(x)=mx+b$ . إنها مُعرَّفة بمقدار جبري خطي بينما تُعرَّف الدالّة التربيعيّة بمقدار تربيعي.

### الدالّة التربيعيّة Quadratic Function

**الدالّة التربيعيّة** هي دالّة تُكتب قاعدتها بواسطة مقدار تربيعي في متغيّر واحد. أي إنها تُكتب على الصورة التالية: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a$ وَ $b$ وَ $c$ تمثّل أعدادًا حقيقيَّة وَ $a \neq 0$. تُدعى الأعداد $a$ وَ $b$ وَ $c$ **معاملات** الدالّة التربيعيّة.

أبسط الدوال التربيعيّة هي الدالّة $f(x)=x^2$ . ويمكنك توليد جميع الدوال التربيعيّة انطلاقًا من هذه الدالّة باستعمال تحويلات بسيطة أو مركّبة. فهي، لهذا السبب، تشكّل **الدالّة الأم** لجميع الدوال التربيعيّة. تشكّل الدالّة $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ مثالاً على دالّة تربيعيّة.

**تفكير ناقد** ما معاملات الدالّة التربيعيّة التي تمثّل مسافة توقُّف السيّارة؟

## مثـــــال

**1** بيّن أن الدالّة $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ دالّة تربيعيّة، وحدّد معاملاتها $a$ وَ $b$ وَ $c$.

**الحـل**

**طريقة أولى**

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=2x(3x+5)-(3x+5)$$
$$=6x^2+10x-3x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

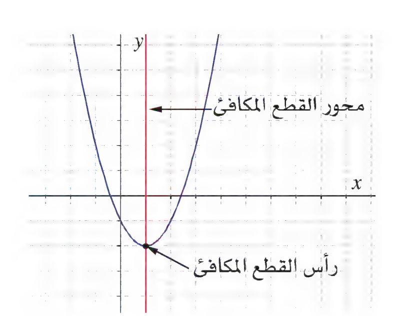
**طريقة ثانية**

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=(2x-1)3x+(2x-1)5$$
$$=6x^2-3x+10x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

بما أن $f(x)=6x^2+7x-5$ فهي دالّة تربيعيّة ومعاملاتها هي $a=6$ ، $b=7$ ، $c=-5$ .

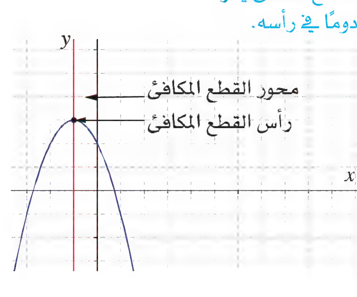
**حـــاولْ** بيّن أن الدالّة $f(x)=(2x-5)(x-2)$ دالّة تربيعيّة وحدّد معاملاتها.

يحمل بيان الدالّة التربيعيّة اسمًا خاصًّا هو **القطع المكافئ** ***Parabola***. يُبيّن الشكل أدناه نوعين من القطوع المكافئة.




مُعامل $x^2$ موجب

لاحظ أن محور القطع المكافئ يمرّ دومًا في رأسه.




مُعامل $x^2$ سالب

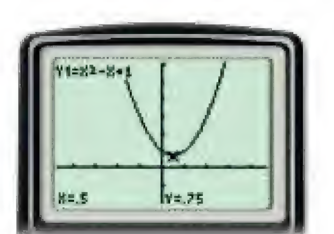
لاحظ أن لكل قطع مكافئ نقطة مميزة تُسمّى **الرأس** ***Vertex*** وأن له محور تناظر يقسمه إلى قسمين متطابقين. لاحظ أيضًا أن رأس بيان الدالّة التربيعيّة يدلّ على قيمتها الكبرى أو قيمتها الصغرى. إذا أمعنت في الدالّة تربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ يتبيّن لك أن حساب قيمة $f(x)$ ممكن أيًّا تكن قيمة $x$. هذا يدلّ على أن مجال الدالّة التربيعيّة يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة. أما مداها فهو، كما يبيّن الرسمان البيانيان السابقان، إما مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي لا تقلّ عن القيمة الصغرى للدالّة (في النوع الأول)، وإما مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي لا تزيد على القيمة الكبرى للدالّة (في النوع الثاني).

**مثـــــال 2** **هل يدلّ رأس الدالّة التربيعيّة $f(x)=x^2-x+1$ على قيمة صغرى أم على قيمة كبرى؟ يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة أو جدول قيم.**

**الحــل**

**طريقة أولى**

يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة لتكشف أن للدالّة قيمة صغرى.




إذا تتبّعت بيان الدالّة يبدو لك أن إحداثيي الرأس هما $(0.5, 0.75)$ .

**طريقة ثانية**

يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة لإنشاء جدول قيم للدالّة. يبيّن جدول القيم أن الدالّة تبلغ قيمتها الصغرى عندما يأخذ $x$ القيمة $0.5$، وأن هذه القيمة الصغرى هي $0.75$.

| X | Y1 |  |
|---|---|---|
| -2.00 | 7.00 |  |
| -1.50 | 4.75 |  |
| -1.00 | 3.00 |  |
| -.50 | 1.75 |  |
| 0.00 | 1.00 |  |
| .50 | .75 |  |
| 1.00 | 1.00 |  |

X=.5

يظهر من هذا الجدول أن رأس القطع المكافئ هو النقطة $(0.5, 0.75)$.

**تكنولوجيا**

**الحاسبة البيانية**

**حــاولْ** هل يدلّ رأس الدالّة التربيعيّة $f(x)=-2x^2-4x+1$ على قيمة صغرى أم على قيمة كبرى؟

**تفكير ناقد** هل يمكنك أن تحدّد معادلة خط التناظر للدالّة التربيعيّة $f(x)=x^2-x+1$ إذا عرفت أن $f(0)=f(1)$ ؟

يمكنك، بالنظر إلى إشارة المعامل $a$، أن تعرف إن كان للدالّة التربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ قيمة كبرى أو قيمة صغرى.

### قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟ Maximum and Minimum values

- بيان الدالّة التربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث تمثّل $a$ و $b$ و $c$ أعدادًا حقيقيّة و $a\neq 0$ ، هو **قطع مكافئ**.
- إذا كان $a$، معامل $x^2$ ، موجبًا، فإن القطع المكافئ ينفتح نحو الأعلى ويشكّل رأسه أدنى نقطة فيه. كما يشكّل الإحداثي $y$ لهذا الرأس **القيمة الصغرى Minimum** للدالّة.
- إذا كان $a$، معامل $x^2$ ، سالبًا، فإن القطع المكافئ ينفتح نحو الأسفل ويشكّل رأسه أعلى نقطة فيه. كما يشكّل الإحداثي $y$ لهذا الرأس **القيمة الكبرى Maximum** للدالّة.
- يشكّل الإحداثي $y$ لرأس القطع المكافئ **قيمة قصوى Extremum** للدالّة التربيعيّة. هذه القيمة القصوى هي إما قيمة كبرى وإما قيمة صغرى.

**مثـــــال 3** **هل القطع المكافئ مُنفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟ هل يدلّ رأسه على قيمة كبرى أم على قيمة صغرى؟**

أ $f(x)=x^2+x-6$

ب $f(x)=5+4x-x^2$

**الحــل**

**أ** في الدالّة $f(x)=x^2+x-6$ معامل $x^2$ هو 1. بما أنه موجب فإن القطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى وللدالّة قيمة صغرى عند الرأس.

**تحقّق**



**ب** في الدالّة $f(x)=5+4x-x^2$ معامل $x^2$ هو 1-. بما أنه سالب فإن القطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل وللدالّة قيمة كبرى عند الرأس.

**تحقّق**



## النشاط 2

## تحويل الدالّة التربيعيّة الأم Transforming Quatratic Parent Function

سوف تحتاج إلى ورق بيانيّ أو حاسبة بيانية.

1. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.

$y=x^2$ $\quad$ $y=x^2+1$ $\quad$ $y=x^2-1$

2. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم إذا أضفت 1 إلى الدالّة أو أنقصته منها؟

3. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.

$y=x^2$ $\quad$ $y=(x+2)^2$ $\quad$ $y=(x-2)^2$

4. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم إذا أضفت 2 إلى المتغيّر الحرّ أو أنقصته منه؟



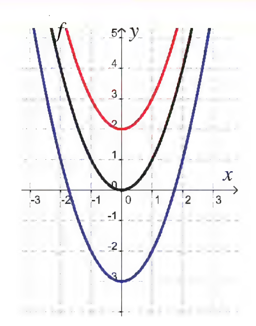
نقطة مراقبة √

5. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.

$y=x^2$ $\quad$ $y=(x-2)^2+1$ $\quad$ $y=(x-2)^2-1$ $\quad$ $y=(x+2)^2+1$

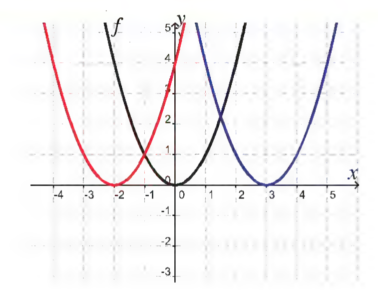
6. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم نتيجة إخضاعه للتحويل الناتج عن إنقاص 2 من $x$ وإضافة 1 إلى الدالّة؟ عن إضافة 2 إلى $x$ وإنقاص 1 من الدالّة؟

نقطة مراقبة √



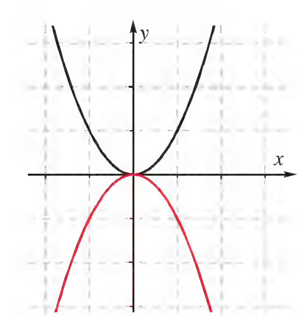
تمثّل كل من الدالّتين $y=x^2+2$ وَ $y=x^2-3$ **سحبًا عموديًا Vertical Translation** لبيان الدالّة الأم $y=x^2$ .

من شأن إضافة عدد إلى الدالّة أو إنقاصه منها، أن يسحب بيانها عموديًا إلى **أعلى** أو إلى **أسفل**.

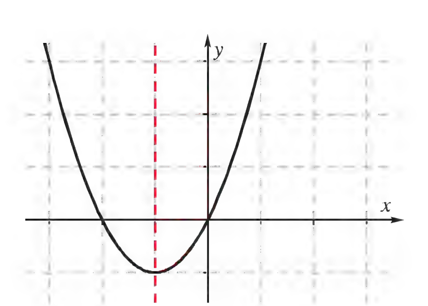


تمثّل كل من الدالّتين $y=(x+2)^2$ وَ $y=(x-3)^2$ **سحبًا أفقيًا Horizontal Translation** لبيان الدالّة الأم $y=x^2$ .

من شأن إضافة عدد إلى المتغيّر الحرّ أو إنقاصه منه أن يسحب بيانها أفقيًا إلى **اليسار** أو **اليمين**.




يمثّل بيان الدالّة $y=-x^2$ عكسًا لبيان الدالّة التربيعيّة الأم حول محور الأول. وبينما يدلّ رأس القطع المكافئ على قيمة صغرى للدالّة التربيعيّة الأم، يدلّ هذا الرأس على قيمة كبرى للدالّة $y=-x^2$.




يشكّل المستقيم العمودي المارّ في رأس القطع المكافئ محور تناظر لهذا الخط البياني، لأن هذا المستقيم يقسم القطع المكافئ إلى جزءين متطابقين. يُدعى هذا المستقيم **محور القطع المكافئ Axis of Symmetry**.

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

**1** أوضح الفرق بين بيان الدالّة الخطيّة وبيان الدالّة التربيعيّة.

**2** أوضح الفرق بين المقدار الجبري الذي يُعرّف دالّة خطيّة والمقدار الجبري الذي يُعرّف دالة تربيعيّة.

**3** كيف تعرف أن رأس القطع المكافئ يدلّ على قيمة صغرى أو قيمة كبرى للدالّة التربيعيّة؟

**4** ما العلاقة بين بيان الدالّة التربيعيّة الأم وبيان الدالّة $y=x^2-8$ ؟

**5** ما العلاقة بين بيان الدالّة التربيعيّة الأم وبيان الدالّة $y=(x-8)^2$ ؟

## تمارين موجّهة

**بيّن أن الدالّة هي دالّة تربيعيّة وحدّد معاملاتها.**

**6** $f(x)=(x+1)(x-7)$

**7** $f(x)=(x+2)(x+5)$

**8** $f(x)=(2x+5)(3x+1)$

**قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟** أجب عن السؤالين التاليين في التمارين من 9 إلى 14:

أ هل القطع المكافئ منفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟

ب هل القيمة القصوى للدالّة قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟

**9** $f(x)=x^2-3x+5$

**10** $f(x)=2-3x-x^2$

**11** $f(x)=x^2+5x+3$

**12** $f(x)=x^2-2x+7$

**13** $f(x)=-x^2+8x+14$

**14** $f(x)=-2x^2-5x+1$

## تمارين وتطبيقات

بيِّن أن الدالّة هي دالّة تربيعيّة وحدِّد معاملاتها.

15 $f(x)=(x-3)(x+8)$
16 $f(x)=(4-x)(7+x)$
17 $f(x)=-(x-2)(x-6)$
18 $f(x)=(2x+3)(4-x)$
19 $f(x)=x(x-3)$
20 $f(x)=(x-6)(x+6)$

هل الدالّة دالة تربيعيّة أم لا؟ أوضح ذلك.

21 $y=3-x^2$
22 $y=3-x$
23 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$
24 $y=\frac{2x^2+5}{x+3}$
25 $y=x^2-x^2(x+7)$
26 $y=\left|x^2+5x-2\right|$

هل القطع المكافئ منفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟ هل القيمة القصوى للدالّة قيمة صغرى أم قيمة كبرى؟

27 $y=2x^2-2x$
28 $y=-8x^2-x$
29 $y=3-x^2$
30 $y=4-x^2-2x$

ارسم بيان الدالّة وحدِّد قيمة تقريبيّة لإحداثيي رأس القطع المكافئ.

31 $y=x^2-x+9$
32 $y=-x^2-2x+9$
33 $y=4x^2-2x-2$
34 $y=-0.5(x+4)^2$
35 $y=(x-2)^2-1$
36 $y=-(x-2)(x+6)$

كيف تُحوّل بيان الدالّة الأم للحصول على بيان كل دالّة.

37 $y=(x-2)^2-1$
38 $y=(x-5)^2-2$
39 $y=-(x-2)^2+1$
40 $y=-(x+6)^2-2$
41 $y=-(x-3)^2-2$
42 $y=(x+4)^2-7$

43 اشرح طريقة تسمح بتحديد إحداثيي رأس القطع المكافئ $y=(x+a)(x-a)$ .

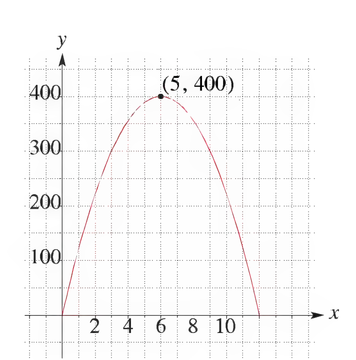
44 **تحويلات** ارسم بيان الدالّة ثم أجب عن الأسئلة المطروحة.

أ $y=(x+2)(x-4)$
ب $y=2(x+2)(x-4)$
ج $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$
د $y=-(x+2)(x-4)$
هـ $y=-2(x+2)(x-4)$
و $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

- بماذا تشترك هذه الخطوط البيانيّة الستَّة؟
- أي منها منفتح إلى الأسفل؟
- أي منها منفتح إلى الأعلى؟



**فيزياء** يمثّل الخط البياني المقابل العلاقة بين الوقت محسوبًا بالثواني، وارتفاع قذيفة أطلقت نحو الأعلى، محسوبًا بالأمتار.




**45** ما أعلى ارتفاع وصلت إليه القذيفة؟

**46** كم ثانية استغرقت القذيفة لتصل إلى الارتفاع الأعلى؟ ما محور هذا البيان؟

**47** **فيزياء** أطلق جوامير سهمًا نحو الأعلى بسرعة 40 مترًا في الثانية. حدِّد ارتفاع السهم بعد 5 ثوانٍ، باستعمال الدالّة $y = 40x - 5x^2$ ، حيث يمثّل $x$ الوقت بالثواني ويمثّل $y$ الارتفاع بالأمتار. قرّب جوابك إلى أقرب عشر.



## نظرة إلى الوراء

**يتضمّن المقدار $2(x-3)^2 + 1$ ضربًا وعملية داخل القوسين ورفعًا إلى قوّة بأس 2 وجمعًا.**

**48** أيّ من هذه العمليات عليك إجراؤها أوّلاً؟

**49** أي منها عليك إجراؤها ثانيًا؟

**50** أي منها عليك إجراؤها ثالثًا؟

**حُلّ.**

**51** $\begin{cases} 3y + 2x = 2 \\ y = x \end{cases}$

**52** $\begin{cases} y = 4 \\ 3y = 2x \end{cases}$

**53** عدد من رقمين، يزيد 2 على 3 أضعاف مجموع رقميه. رقم عشراته يقل 4 عن رقم آحاده. ما هذا العدد؟



## نظرة إلى الأمام

تطبيقات

**54** ارسم في المستوي الإحداثي نفسه، بيانات الدوال: $y = x^2 - 3x + 5$ وَ $y = x^2 + 7x + 6$ وَ $y = x^2 - 14x + 49$ . ما عدد النقاط المشتركة الممكنة للمحور الأول مع كل قطع مكافئ؟




# تحليل المقادير الجبريّة التربيعيّة

## Factoring Quadratic Expressions



**الأهداف**

- يحلِّل مقدارًا جبريًّا تربيعيًّا.
- يستعمل التحليل لحلّ معادلة تربيعيّة وإيجاد أصفار دالّة تربيعيّة.

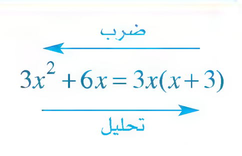
**لماذا** تستخدم المقادير الجبرية التربيعيّة لوصف الكثير من الأنماط في الحياة اليوميّة مثل نمط الحوض في الصورة.

**تطبيقات**
**هندسة معمارية**

صمّم مهندس معماري حوضًا للحديقة العامة على الشكل المبيّن في الصورة أعلاه. رصف المهندس داخل الحوض عددًا من المكعّبات المتشابهة على شكل إشارة الضرب × وعلى عدّة مستويات. عدد المكعّبات في كل ذراع من أذرع الرمز يقلّ واحدًا عن عددها في الذراع الذي يقع تحته مباشرة. تسمح القاعدة $m=2n^2-n$ بحساب عدد المكعّبات $m$ اللازمة لإنشاء حوض من $n$ مستوى. ما عدد مستويات حوض فيها 66 مكعّبًا؟

## تحليل المقادير الجبرية التربيعيّة Factoring Quadratic Expressions

عندما تعلّمت ضرب مقدارين مثل $2x$ وَ $x+3$، حوّلت ناتج ضرب المقدارين إلى مجموع حدود. **التحليل Factoring** هو العملية العكسية. فهو يمكّنك من تحويل مجموع حدود إلى ناتج ضرب.




لتحليل مقدار يتضمّن حدّين أو أكثر، استخرج **العامل المشترك الأكبر** (ع م أ) *Greater Common Factor (GCF)* للمقدارين كما هو مبيّن في المثال التالي:

**مثال 1**

حلّل المقدار التربيعي.

أ $3m^2-12m$

ب $3x(4x+5)-5(4x+5)$

**الحل**

استخرج العامل المشترك الأكبر.

أ $3m^2-12m=3m\times(m)-3m\times(4)$

العامل المشترك الأكبر هو $3m$ .

$3m^2-12m=3m\times(m)-3m\times(4)$

$=3m(m-4)$

ب العامل المشترك الأكبر هو $(4x+5)$ .



$3x(4x+5)-5(4x+5)$

$=(3x-5)(4x+5)$



**حاول** حلِّل كلاًّ من المقدارين $5x^2+15x$ وَ $4(2x-1)+(2x-1)x$.

الصورة العامة للمقدار التربيعي هي $ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$ .

يمكنك تحليل الكثير من المقادير التربيعيّة جبريًّا. أمعن النظر في تحليل المقدار أدناه. (حيث $a=1$)

حل المسائل

**ابحث عن نمط.** انظر إلى الصورة التحليليّة للمقدار التربيعي، ولاحظ أن مجموع الحدّين الثابتين في العاملين يساوي معامل $x$ في المقدار التربيعي قبل تحليله، وأن ناتج ضربهما يساوي الحدّ الثابت.

$x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$

$5+2=7$ ، $5\times(-2)=10$

$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$

$(-5)+(-2)=-7$ ، $(-5)\times(-2)=10$

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$

$5+(-2)=3$ ، $5\times(2)=10$

$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$

$(-5)+2=-3$ ، $(-5)\times(2)=-10$

تسمح دراسة الأنماط السابقة باستخلاص قاعدة لتحليل المقدار التربيعي $x^2-bx+c$ .

لكي تحلّل المقدار $x^2-bx+c$ ، حيث $b$ وَ $c$ عددان صحيحان، ابحث عن عددين صحيحين $r$ وَ $s$ يكون مجموعهما $b$ وناتج ضربهما $c$. بعد ذلك حلّل المقدار كما يلي:

$$x^2+bx+c=(x+r)(x+s)$$

عندما يكون $c$ موجبًا، حلّله إلى ناتج ضرب عددين لهما الإشارة نفسها. هي إشارة معامل $x$ .

## مثال 2

حلِّل المقدار: $x^2+5x+6$ .

**الحل**

**خمّن وتحقّق** ابدأ بكتابة $(x\quad)(x\quad)$. ابحث عن عوامل العدد 6 التي لها الإشارة نفسها والتي مجموعها 5:

| $(x+1)(x+6)$ | $(x+2)(x+3)$ | $(x-1)(x-6)$ | $(x-2)(x-3)$ |
|---|---|---|---|
| $1\times x+6x$ | $2x+3x$ | $(-1)x+(-6)x$ | $(-2)x+(-3)x$ |
| ؟ | ؟ | ؟ | ؟ |
| $5x$ | $5x$ | $5x$ | $5x$ |
| خطأ | صواب | خطأ | خطأ |

إذًا، $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ .

**حاولْ** حلِّل المقدار $x^2-10x-11$ .

عندما يكون $c$ عددًا سالبًا في $x^2+bx+c$ ، ابحث عن عاملين مختلفين في الإشارة.

## مثـــــال 3

حلّل المقدار $x^2 - 7x - 30$ .

**الحــل**

**خمِّن وتحقّق** ابدأ بكتابة $(x \quad)(x \quad)$. ابحث عن عاملين من عوامل العدد (30−) يكون مجموعهما 7− احرص أن يكون العاملان مختلفين في الإشارة.

| $(x-1)(x+30)$ | $(x+1)(x-30)$ | $(x-2)(x+15)$ |
|---|---|---|
| $(-1)x + 30x$ | $1 \times x + (-30)x$ | $(-2)x + 15 \times x$ |
| $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ |
| $-7x$ | $-7x$ | $-7x$ |
| خطأ | خطأ | خطأ |

| $(x+2)(x-15)$ | $(x-3)+(x+10)$ | $(x+3)(x-10)$ |
|---|---|---|
| $2x + (-15) \times x$ | $(-3)x + 10 \times x$ | $3 \times x + (-10) \times x$ |
| $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ |
| $-7x$ | $-7x$ | $-7x$ |
| خطأ | خطأ | صواب |

إذًا، $x^2 - 7x - 30 = (x+3)(x-10)$ .

**حــاول** حلّل المقدار $3x^2 + 11x - 20$

تفحّص الآن ناتج ضرب المقدارين $x+3$ وَ $x-3$ .

فرق مربعين

$$(x+3)(x-3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$

**تحليل فرق المربعين Factoring The Difference Of Two Sqaures**

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

تفحّص نتيجة تربيع $x+3$ ونتيجة تربيع $x-3$ .

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2$$

$$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2$$

مربّع كامل

**تحليل المربّع الكامل Factoring Perfect Sqaures**

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

**مثـــــــال** 4

حلّل كل مقدار.

أ $x^4-16$

ب $4x^2-24x+36$

الحـل

أ $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)$
$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

ب $4x^2-24x+36=4(x^2-6x+9)$
$=4\left[x^2-2\times3\times x+3^2\right]$
$=4(x-3)^2$

**حـــاولْ** حلّل كل مقدار: $9x^2-49$ وَ $3x^2-6x+3$ .

## حلّ المعادلات التربيعيّة بالتحليل Using Factoring to Solve Quadratic Equations

يمكنك، في بعض الأحيان، استعمال التحليل لحلّ معادلة أو إيجاد أصفار دالّة. **صفر الدالّة** $d(x)$ هو كل عدد $r$ يحقّق $f(r)=0$ .

### خاصيّة الضرب الصفري Zero Product Property

إذا كان $p\times q=0$ فإن $p=0$ أو $q=0$ .

تُكتب المعادلة التربيعيّة على **الصورة العامة** كما يلي: $ax^2+bx+c=0$ . إذا تمكّنت من تحليل المقدار $ax^2+bx+c$، فإن تطبيق خاصية الضرب الصفري يسمح لك بحلّ المعادلة.
**كيف تطبّق خاصية الضرب الصفري؟** حلِّل المقدار التربيعي واكتب أن ناتج الضرب الحاصل يساوي 0.

**مثـــــــال** 5

**حُلَّ المعادلة $x^2+6x=-5$ .**

الحـل

ابدأ بكتابة المعادلة على الصورة العامة $x^2+6x+5=0$ ، وحلّل المقدار $x^2+6x+5$ لتحصل على $x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$ . بعد ذلك اكتب $(x+5)(x+1)=0$ .
كيف تحدّد جذرَي المعادلة $(x+5)(x+1)=0$ ؟
هذه المعادلة الأخيرة تعطيك، باستعمال خاصية الضرب الصفري، المعادلتين التاليتين:
$(x+5)=0$ أو $(x+1)=0$، أي $x=-5$ أو $x=-1$ . جذرا المعادلة هما $-1$ وَ $-5$ .

**مثـــــــال** 6

**استخدم خاصية الضرب الصفري لتجد صفرَي الدالة:**

أ $f(x)=2x^2-11x$ وَ ب $g(x)=x^2-14x+45$

الحـل

أ
$2x^2-11x=0$
$x(2x-11)=0$
$x=0$ أو $2x-11=0$
$x=0$ $x=\frac{11}{2}$

ب
$x^2-14x+45=0$
$(x-5)(x-9)=0$
$x-5=0$ أو $x-9=0$
$x=5$ $x=9$

**حــاولْ** استخدم خاصية الضرب الصفري لتجد صفرَي الدالة.

أ $f(x)=3x^2+12x$ ب $g(x)=x^2+4x-21$

**تفكير ناقد** برهن أن للدالة $f(x)=ax^2+bx$ ، حيث $a\neq 0$ ، جذرين هما 0 وَ $-\frac{b}{a}$.

**مثـــال 7** بالعودة إلى مسألة الحوض الواردة في بداية الدرس، كم يكون عدد مستويات الحوض عندما يكون عدد المكعبات 66؟

**الحل**

حُلّ المعادلة $2n^2-n=66$ بالتحليل.

$2n^2-n-66=0$ اكتب المعادلة على الصورة العامة

$(2n+11)(n-6)=0$ حلّل المقدار $2n^2-n-66$

$2n+11=0$ أو $n-6=0$ استعمل خاصية الضرب الصفري

$n=-5.5$ أو $n=6$

عدد المستويات 6 لأن عدد المستويات لا يكون إلا عددًا صحيحًا موجبًا.

**مساعدة**

إبدأ دائمًا باستخراج العامل المُشترك، إن وُجد.

# التمــــاريــــن

## التواصل في الرياضيات

1. كيف تجد $b$ وَ $c$ إذا كان $x^2+34x+285=(x+b)(x+c)$ ؟
2. ماذا تعرف عن تحليل المقدار التربيعي $x^2+bx+c$ عندما يكون $c$ موجبًا؟ عندما يكون سالبًا؟ ما المعلومة التي توفّرها إشارة $b$ في كل حالة؟
3. ماذا يمكنك أن تقول عن $b$ وَ $c$ إذا كان ناتج ضربهما صفرًا $(bc=0)$ ؟

## تمارين موجّهة

**حلّل كل مقدار تربيعي.**

4. $2x^2-8x$
5. $2x^2-6x$
6. $5x^2-15x$
7. $4x(x+3)-7(x+3)$
8. $3(4b+7)-2b(4b+7)$
9. $8d(9d-5)+3(9d-5)$
10. $x^2+5x+6$
11. $x^2+8x+7$
12. $x^2-5x+4$
13. $x^2-4x-12$
14. $x^2-9x-36$
15. $x^2+10x-24$
16. $2x^2+9x+10$
17. $3x^2+5x+2$
18. $5x^2+13x-6$
19. $8x^2+24x-14x-42$
20. $12x^2+21x-8x-14$
21. $72x^2-56x-36x+28$
22. $x^2-81$
23. $2x^2-8$
24. $16x^2-25$
25. $x^2+8x+16$

**استعمل خاصية الضرب الصفري لتحديد صفرَي كل دالّة.**

26 $f(x)=x^2+7x$

27 $f(x)=x^2+6x+9$

28 $f(x)=x^2+3x-10$

29 **هندسة** وصل سمير بين عدد من النقاط بقطع مستقيمة. رسم 36 قطعة مستقيمة. ما عدد النقاط، علمًا بأن ربط $n$ نقطة يحتاج إلى $\frac{n(n-1)}{2}$ قطعة مستقيمة؟

## تمارين وتطبيقات

**حلّل كل مقدار.**

30 $3x+6$

31 $3x^2+18$

32 $10n-n^2$

33 $x-4x^2$

34 $6x-2x^2$

35 $3x^2-15x$

36 $5x(x-2)-3(x-2)$

37 $(x+3)(2x)+(x+3)7$

**حلّل كل مقدار.**

38 $x^2-16x+15$

39 $x^2+8x+16$

40 $x^2-26x+48$

41 $x^2+4x-32$

42 $x^2+7x-30$

43 $x^2-10x-24$

44 $-22x-48+x^2$

45 $2x-x^2-24$

46 $x^2-56-10x$

47 $56+10x-x^2$

48 $30+x-x^2$

49 $24+10x-x^2$

50 $3x^2+10x+3$

51 $2x^2+5x+2$

52 $2x^2+3x+1$

53 $3x^2+7x+2$

54 $12x^2-3x-9$

55 $3x^2-5x-2$

**استعمل خاصية الضرب الصفري لحلّ المعادلة.**

56 $15x^2=7x+2$

57 $3x^2-5x=2$

58 $4x-4=-15x^2$

59 $3x^2+3=10x$

60 $2x^2-15=-7x$

61 $6x^2-17x=-12$

62 $x^2-36=0$

63 $t^2-9=0$

64 $x^4-81=0$

65 $x^4-1=0$

66 $4x^2-9=0$

67 $25x^2-16=0$

68 $x^2-2x+1=0$

69 $x^2+4x+4=0$

70 $9x^2=-6x-1$

71 $4x^2+1=4x$

72 $-4+20x-25x^2=0$

73 $40x+25=-16x^2$

74 $64+16x+x^2=0$

75 $9-6x+x^2=0$

**استعمل التحليل وخاصية الضرب الصفري لتجد صفرَي الدالّة التربيعيّة.**

**76** $f(x)=x^2-7x+10$ **77** $g(x)=t^2-2t-15$

**78** $f(x)=4x^2+4x-24$ **79** $g(x)=6x^2+3x-9$

**80** $f(x)=t^2+7t-60$ **81** $k(x)=x^2-15x+56$

**82** $f(x)=x^2+8x+12$ **83** $g(x)=x^2-3x-40$

**84** $g(x)=6x^2+20x-16$ **85** $k(x)=4x^2-8x+3$

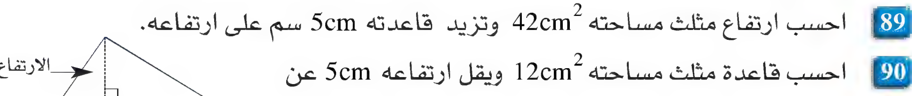
**حلّل كل مقدار.**




**86** $(a+b)^4-(a-b)^4$ **87** $x^{2n}-1$ **88** $x^{2n}-2x^n+1$

**ربط**

**هندسة** قاعدة حساب مساحة المثلث هي $A=\frac{1}{2}bh$ حيث يمثل $b$ القاعدة وَ $h$ الارتفاع النازل عليها. استعمل هذه المعلومة لحلّ التمرينين 89 وَ 90.




**89** احسب ارتفاع مثلث مساحته $42\text{cm}^2$ وتزيد قاعدته 5cm سم على ارتفاعه.

**90** احسب قاعدة مثلث مساحته $12\text{cm}^2$ ويقل ارتفاعه 5cm عن قاعدته.

**تطبيقات**

**91** **رياضة** ركل حارس المرمى كرة القدم الموجودة على الأرض. تشكّل الدالة $h(t)=-4.9t^2+19.6t$ نموذجًا لحساب ارتفاع الكرة عن الأرض بالأمتار بعد $t$ ثانية من ركلها. بعد كم ثانية تلامس الكرة الأرض من جديد؟

## نظرة إلى الوراء

**حُلّ المتباينة ومثّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد.**

**92** $2x-4>12+5x$ **93** $2x-\frac{3}{4}\geq 7$

**94** $3(3x+7)-12\leq 8-(\frac{1}{2}x+9)$ **95** $-2(\frac{2}{3}x+5)-13<0$

**اضرب.**

**96** $(3x+4)(-x-5)$ **97** $(-2x+9)(-4x+7)$

**98** $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4})(-5x-2)$

## نظرة إلى الأمام

حلّل المقدار التربيعي إذا كان ذلك ممكنًا.

**99** $(x+2)^2-4$ **100** $(x+9)^2+36$ **101** $(x-1)^2-16$

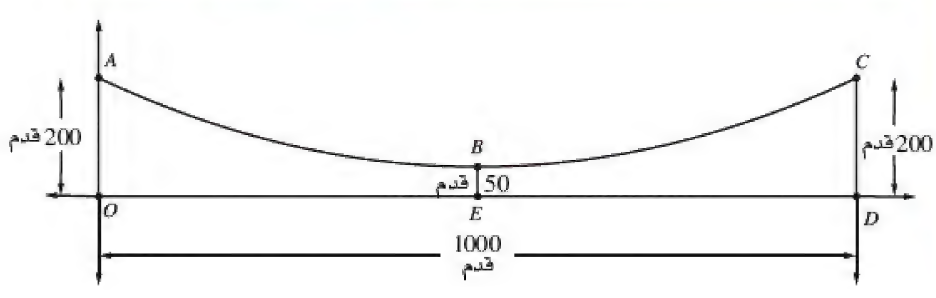



# إكمال المربّع CompletingThe Square




**الأهداف**

- يحلّ المعادلة التربيعيّة بإكمال المربّع.
- يميّز رأس القطع المكافئ ويحدّد إحداثياته.
- يحلّ المعادلة التربيعيّة بيانيًّا.




**تطبيقات**
**هندسة الجسور**

يُخطط المهندسون لبناء جسر معلّق كما هو مبيّن في الرسم أعلاه. يُظهر الرسم شكل السلك المعدني الذي يحمل الجسر. هذا الشكل قريب من بيان الدالّة التربيعيّة. يمكن تقريب الدالّة التي يمثّلها السلك بالدالة $f(x)=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$ حيث $0\leq x\leq 1000$ . اكتب هذه الدالة التربيعية على صورة تسمح لك بتحديد إحداثيي النقطة الأدنى بسهولة وحدد ارتفاع هذه النقطة.

تذكّر أنك تعلّمت في الصف التاسع كيف تحل معادلة من النوع $x^2=k$ بتحديد الجذر التربيعي.

**مثــــــال**

**1** حُلّ المعادلة $x^2=9$

**الحــل**

$$x^2=9$$
$$x=\pm\sqrt{9}$$
$$x=\pm 3$$

يمكنك استعمال الطريقة نفسها لحل معادلة من النوع $(a+x)^2=k$ .

**مثــــــال** 2 حُلَّ المعادلة $(x+3)^2=16$

**الحـل**

$$(x+3)^2=16$$
$$(x+3)^2=\pm\sqrt{16}$$
$$x+3=\pm4$$
$$x=-7 \text{ أو } x=1$$

عندما لا يكون المقدار الجبري في معادلة تربيعيّة مربّعًا كاملاً، يمكنك تكوين مثل هذا المربّع بطريقة **إكمال المربّع Completing the Square**. من شأن هذه الطريقة أن تساعدك على استعمال التحليل لحلّ المعادلة.

تفحّص العلاقة بين الحدود في مربّع كامل.

| حالة خاصة | الحالة العامة |
|---|---|
| $x^2+8x+16=(x+4)^2$ | $x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ |
| $\frac{1}{2}(8)=4\rightarrow4^2=16$ | $\frac{1}{2}b=\frac{b}{2}\rightarrow\left(\frac{b}{2}\right)^2$ |

الحد الثابت $c$ في مربّع كامل هو تربيع نصف عامل $x$ أي $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إذا كان $a=1$.

**مثــــــال** 3 أضف عددًا إلى كل مقدار لتحصل على مربّع كامل.

أ $x^2-6x$



ب $x^2-15x$

**الحـل**

أ معامل $x^2$ هو 1 وَ معامل $x$ هو $-6$.

$$\frac{1}{2}(-6)=-3\rightarrow(-3)^2=9$$

المربَّع الكامل هو إذًا:

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

ب معامل $x^2$ هو 1 وَ معامل س هو 15.

$$\frac{1}{2}(15)=\frac{15}{2}\rightarrow\left(\frac{15}{2}\right)^2$$

المربَّع الكامل هو إذًا:

$$x^2+15x+\left(\frac{15}{2}\right)^2=\left(x+\frac{15}{2}\right)^2$$

**حـــاولْ** أضف عددًا إلى كل مقدار لتحصل على مربّع كامل.

أ $x^2-7x$ ب $x^2+16x$

## حل المعادلة التربيعيّة بإكمال المربّع Solving Quadratic Equation by Completing The Square

**مثــــــال** 4 حُلَّ المعادلة $x^2+6x-16=0$

**الحـل**

$$x^2+6x-16=0$$
$$x^2+6x=16$$
$$x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2=16+\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

أضف $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة

$$x^2+6x+9=16+9$$
$$(x+3)^2=25$$

$$x+3=\pm5$$

$x+3=-5$ أو $x+3=5$

$x=-8$ أو $x=2$

**حـــاولْ** حُلّ المعادلة $x^2+10x-24=0$ .

**مثـــــال** 5 حُلّ المعادلة $2x^2+6x=7$

**الحــل**

**طريقة أولى:** جبريًّا. حُلّ المعادلة بإكمال المربّع.

$$2x^2+6x=7$$

$$2(x^2+3x)=7$$

$$x^2+3x=\frac{7}{2}$$

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

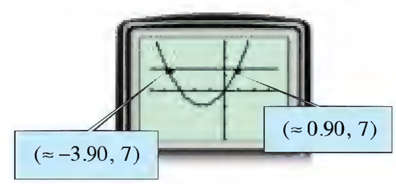
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}+\frac{9}{4}$$

$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{23}{4}}$$

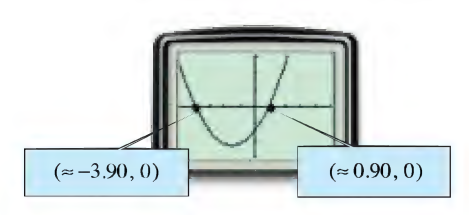
$x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{23}{4}}$ أو $x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{23}{4}}$

$x\approx-3.90$ أو $x\approx0.90$

**طريقة ثانية:** بيانيًّا. ارسم بيان كل من الدالّتين $y=7$ وَ $y=x^2+6x$ ثم حدِّد الإحداثي الأول لكل نقطة تقاطع




أو ارسم بيان الدالّة التربيعيّة $y=2x^2+6x-7$ وحدِّد نقاط تقاطعها مع المحور الأول.




**حـــاولْ** حُلّ المعادلة $2x^2+10x=6$ .

## الصورة الرأسية Vertex Form

تعلم أن بيان الدالّة $y=ax^2+bx+c$ هو قطع مكافئ. سوف تستعمل طريقة إكمال المربّع لكتابة قاعدة الدالّة التربيعيّة على صورة تبرز إحداثيات رأس القطع المكافئ.

### الصورة الرأسية Vertex Form

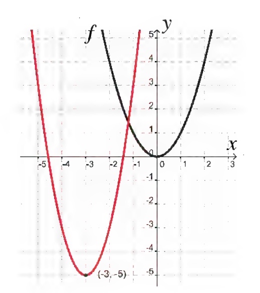
يمكن كتابة معادلة القطع المكافئ $y=ax^2+bx+c$ على الصورة الرأسية $y=a(x-h)^2+k$ .

في هذه الحالة تكون النقطة $(h\ ,k)$ رأس القطع المكافئ وَ $x=h$ معادلة محوره.



**مثال** 6 **اكتب معادلة القطع المكافئ $y=2x^2+12x+13$ على الصورة الرأسية، واكتب معادلة محوره.**

الحل



$$y=2x^2+12x+13$$
$$=2(x^2+6x)+13$$
$$=2(x^2+6x+9-9)+13$$
$$=2(x^2+6x+9)-18+13$$
$$=2(x+3)^2-5$$
$$=2(x-(-3))^2+(-5)$$

رأس القطع المكافئ هو النقطة $(-3, -5)$ ومعادلة محوره هي $x=-3$ .

**حاول** اكتب معادلة القطع المكافئ $y=3x^2-9x-2$ على الصورة الرأسية واكتب معادلة محوره.

**مثال** 7 **بالعودة إلى أول الدرس، أكمل المربع واكتب $f(x)=\frac{3}{5000}-\frac{3}{5}x+200$ على الصورة الرأسية.**
**استنتج إحداثيي النقطة الأدنى على السلك المعدني.**



الحل

**طريقة أولى:** جبريًّا.

$$f(x)=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$$
$$=\frac{3}{5000}(x^2-1000x)+200$$
$$=\frac{3}{5000}\left[x^2-1000x+\left(\frac{1000}{2}\right)^2\right]+200-\frac{3}{5000}\times\left(\frac{1000}{2}\right)^2$$
$$=\frac{3}{5000}(x-500)^2+50$$

النقطة الأدنى على السلك المعدني هي رأس القطع المكافئ. إنها النقطة $(500, 50)$ .




**طريقة ثانية:** بيانيًّا.

ارسم بيان الدالّة $y=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$
وحدِّد إحداثيي النقطة الأدنى.



# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1. أوضح كيف تحل المعادلة $x^2+4x-13=0$ بطريقة إكمال المربّع.
2. أوضح كيف تحلّ المعادلة $2x^2+4x=15$ بطريقة إكمال المربّع.
3. استعنْ بالمثال 5 وأوضح كيف تحلّ بيانيًّا المعادلة $2x^2+4x=15$ .
4. أوضح ما يمثّله $h$ وَ $k$ في الصورة الرأسية للمعادلة التربيعيّة.

## تمارين موجّهة

**أضف عددًا إلى المقدار التربيعي لتحصل على مربّع كامل.**

5 $x^2-12x$ 6 $x^2+5x$

7 حُلَّ المعادلة $x^2-4x-21=0$ بطريقة إكمال المربّع.

8 حُلَّ المعادلة $2x^2+5x=3$.

ربـط

9 **تحويلات** اكتب الدالّة التربيعيّة $y=x^2+12x+20$ على الصورة الرأسيّة، واكتب معادلة محور القطع المكافئ.

10 كتب زيلوان معادلة قطع مكافئ على الشكل التالي $y=-16x^2+32x+5$. أكمل المربّع ثم اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة الرأسية.

## تمارين وتطبيقات

**أضف عددًا إلى المقدار التربيعي لتحصل على مربّع كامل.**

11 $x^2+10x$ 12 $x^2-14x$ 13 $x^2-8x$

14 $x^2+2x$ 15 $x^2+13x$ 16 $x^2+7x$

**حُلَّ المعادلة بطريقة إكمال المربّع.**

17 $x^2-8x=4$ 18 $x^2+2x=13$

19 $x^2-5x-1=4-3x$ 20 $0=x^2-6x+3$

21 $0=x^2+7x-26$ 22 $0=x^2-3x-6$

23 $x^2+7x+10=0$ 24 $x^2+10x+16=0$

25 $x^2-x=30$ 26 $3x^2-2x-12=0$

27 $-2x^2+14x+60=0$ 28 $0=3x^2-11x+6$

29 $-10=x^2-8x+2$ 30 $x^2+16x=2$

31 $4-x^2=10x$ 32 $x^2=23-15x$

33 $8x-2=x^2+15x$ 34 $-32x=16-x^2$

35 $2x^2=22x-11$ 36 $4x^2-8=-13x$

**اكتب الدالّة التربيعيّة على الصورة الرأسية. اكتب إحداثيات رأس القطع المكافئ، واكتب معادلة محوره.**

37 $y=3x^2$ 38 $y=-x^2+2$

39 $y=x^2-5$ 40 $y=x^2+8x+11$

41 $y=x^2-6x-2$ 42 $y=-x^2+4x+2$

43 $y=x^2+7x+3$ 44 $y=-3x^2+6x-9$

**تطبيــــقات**

45 اكتب ثلاث دوالّ تربيعية يقع رأس كل منها عند النقطة $(2, 5)$ .

46 اكتب معادلة الدالّة التربيعيّة التي يمرّ بيانها بالنقطة $(1, 8)$ ويقع رأسها عند النقطة $(2, 5)$ .

**في التمرينين 47 وَ 48، اكتب الإجابات مضبوطة، ثم مقرّبة إلى أقرب عُشر.**

47 **هندسة** مستطيلٌ يزيد طوله 6 أمتار على عرضه. ما عرض المستطيل وما طوله إذا كانت مساحته 50 مترًا مربعًا؟

48 تُمثّل الدالّة $w = x^2 - 12x + 210$ الطاقة (بالميغاوات) التي تنتجها محطة توليد طاقة، حيث يدلّ $x$ على الوقت بالساعة (بين 0 وَ 24).

أ عند أي ساعة ينخفض إنتاج المحطة إلى حدّه الأدنى؟

ب ما الطاقة المنتجة آنذاك؟

ج خلال أي ساعة من ساعات اليوم تبلغ الطاقة المنتجة 187 ميغاوات؟

49 **جمع التبرعات** تقيم جمعية المُعَوَّق احتفالاً سنويًّا لجمع التبرعات. مثّلت الدالة $P(t) = -16t^2 + 800t - 4000$ القيمة الصافية للتبرعات بعد دفع جميع النفقات. يرمز $p$ إلى قيمة التبرُّعات بآلاف الدنانير، وَ $t$ إلى ثمن بطاقة الدخول.

أ ما ثمن البطاقة الذي يؤمّن الربح الأكبر؟

ب ما قيمة هذا الربح الأكبر؟

ج بأي ثمن ينبغي للجمعية أن تبيع البطاقة لتجمع تبرّعات قيمتها الصافية 424 5 ألف دينار.



## نظرة إلى الوراء

**حُلّ المعادلة.**

50 $5x + 3 = 2x + 18$

51 $\frac{2(x+3)}{5} = x - 3$

52 $20 = 6x - 10$

53 احسب قيمة الدالّة $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ عندما $x = 2$ و عندما $x = -2$ .

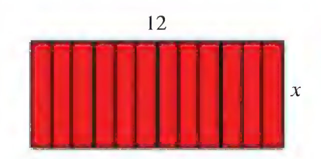
54 احسب قيمة الدالّة $f(x) = 7 - 4x$ عندما $x = 2$ و عندما $x = -3$ .

## نظرة إلى الأمام

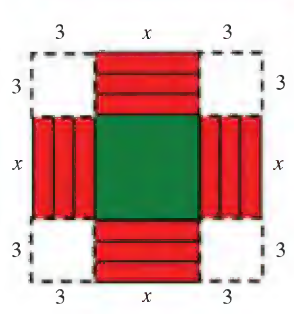



**نافذة على الثقافة الإسلامية:** من أوائل الكتب عن الجبر في العالم، كتاب «الجبر والمقابلة» للعالم المسلم الخوارزمي. استعمل الخوارزمي في كتابه طريقة لحل المعادلة التربيعيّة تشبه طريقة إكمال المربّع.

بغية إكمال المربّع لحل معادلة مثل $x^2 + 12x = 45$ ، يبدأ الخوارزمي بمربّع يساوي ضلعه $x$ وَ 12 مستطيلاً طول الواحد منها $x$ وعرضه 1.




**الخطوة 1:** اقسم المستطيلات إلى 4 مجموعات تتكوَّن كل منها من 3 مستطيلات، ثم ضع مستطيلات كل مجموعة إلى جانب ضلع من أضلاع المربّع، كما هو مبيّن في الرسم المقابل. مساحة الشكل الذي تحصل عليه هي $x^2 + 12x$ ، أي 45 .




**الخطوة 2:** لإكمال المربّع، ما عليك إلا أن تضيف مربّعًا مساحته $3 \times 3$ أي 9، عند كل ركن في الشكل.

$$9 \times 4 = 36$$

مساحة المربّع الكبير تساوي $45 + 36 = 81$ . ينتج عن ذلك أن طول ضلع المربّع الكبير يساوي 9. غير أن طول ضلع المربّع الكبير يساوي $x + 6 = (3 + x + 3)$ .
إذًا، $6 + x = 9$ وبالتالي $x = 3$ .

**استعمل طريقة الخوارزمي لحلّ كل معادلة.**

**55** $x^2 + 20x = 125$

**56** $x^2 + 32x = 33$

**57** $x^2 + 56x = 116$




# حلّ المعادلة التربيعيّة بالقانون

## Solving Quadratic Equation By Formula

**الأهداف**

- يستعمل القانون لإيجاد الجذور الحقيقيّة لمعادلة تربيعيّة.
- يستعمل جذرَي المعادلة التربيعيّة لإيجاد محور القطع المكافئ.

**تطبيقات**
**بناء**




**لماذا** يمكننا باستعمال قانون حلّ المعادلة التربيعية أن نحلّ الكثير من المسائل في الحياة اليوميّة مثل إيجاد بُعدي ممرّ الدار.

قرّرت عائلة مام جوامير بناء ممرّ له عرض ثابت على طول جانبي دارتهم. لدى هذه العائلة مواد تكفي لتغطية ممرّ مساحته $45\text{m}^2$ . كم يجب أن يكون عرض هذا الممرّ؟ يمكنك استعمال قانون المعادلة التربيعية لحل هذه المسألة.

يمكنك استعمال طريقة إكمال المربّع لاشتقاق قانون حلّ المعادلة التربيعيّة في شكلها العام.

| | |
|---|---|
| $ax^2+bx+c=0$ | حيث $a \neq 0$ |
| $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ | اقسم طرفي المعادلة على المعامل $a$ |
| $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ | اطرح $\frac{c}{a}$ من طرفي المعادلة |
| $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ | أكمل المربّع بإضافة مربع نصف معامل $x$ |
| $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ | بسّط |

إذا كان $b^2-4ac$ عددًا سالبًا، فلا يوجد عدد حقيقي $x$ يحقق $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. في هذه الحالة لا يوجد، بين الأعداد الحقيقيّة، جذور للمعادلة.

إذا كان $b^2-4ac=0$ ، فإن $x+\frac{b}{2a}=0$ وبالتالي $x=-\frac{b}{2a}$. للمعادلة في هذه الحالة جذران متساويان قيمة كل منهما $-\frac{b}{2a}$ .

إذا كان $b^2-4ac$ عددًا موجبًا، فإن:

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ خذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ بسّط

$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اطرح $\frac{b}{2a}$ من طرفي المعادلة

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ بسّط

## Discriminant المميّز

يُدعى المقدار $\Delta=b^2-4ac$ ، مميّز المعادلة التربيعيّة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$.

## Solving Quadratic Equation حل المعادلة التربيعيّة

| المميّز | عدد الجذور في مجموعة الأعداد الحقيقيّة |
|---|---|
| $\Delta<0$ | لا جذور للمعادلة التربيعيّة في مجموعة الأعداد الحقيقيّة. |
| $\Delta=0$ | للمعادلة التربيعيّة جذران متساويان $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ . |
| $\Delta>0$ | للمعادلة جذران مختلفان هما $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ وَ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |

## مثال

**4** استعمل القانون لحل المعادلة $x^2+5x-14=0$ .

**الحل**

إذا قارنت $x^2+5x-14=0$ مع الصورة العامّة للمعادلة $ax^2+bx+c=0$

تحصل على $a=1$ وَ $b=5$ وَ $c=-14$ .

حُلّ المعادلة على الشكل التالي:

1. احسب المميّز عبر تعويض كل معامل بقيمته $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=5^2-4\times1\times(-14)=25+56=81$

2. بما أن المميز موجب، فإن للمعادلة جذرَين مختلفَين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ وَ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-5+\sqrt{81}}{2}$ وَ $=\frac{-5-\sqrt{81}}{2}$

$=2$ وَ $=-7$

**حاولْ** حُلّ $x^2-7x+6=0$ باستعمال القانون.

**نقطة مراقبة √** حُلّ المعادلة $x^2+5x-14=0$ بالتحليل، للتحقّق من صحة الإجابة في المثال 1.

## مثال 2

**استعمل القانون لحلّ المعادلة $4x^2 = 8 - 3x$. اكتب الجذرين مضبوطين ثم قرّبهما إلى أقرب عُشر.**

حل المسائل

**الحل**

اكتب $4x^2 = 8 - 3x$ على الصورة العامّة، تحصل على $4x^2 + 3x - 8 = 0$. معاملات المعادلة هي:
$a = 4$ وَ $b = 3$ وَ $c = -8$.

احسب المميّز بالتعويض: $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 4(-8) = 9 + 128 = 137$ .

للمعادلة جذران لأن المميز موجب. هذان الجذران مختلفان وهما:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2} \quad \text{وَ} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

$$= \frac{-3+\sqrt{137}}{8} \quad \text{وَ} \quad = \frac{-3-\sqrt{137}}{8}$$

$$\approx 1.1 \quad \text{وَ} \quad \approx -1.8$$

**حاول**

استعمل القانون لحل المعادلة $2x^2 - 6x = -3$ . اكتب الجذرين مضبوطين، ثم قرّبهما إلى أقرب عشر.

## مثال 3

تطبيقات

بالعودة إلى أول الدرس، حدِّد عرض الممرّ علمًا أن عائلة مام جوامير تملك من المواد ما يكفي لتغطية 54 مترًا مربّعًا.

الدار
$9x$
$6x$
$x^2$
$x$
9 أمتار
6 أمتار

**الحل**

المقدار الذي يمثّل المساحة هو
$A(x) = x^2 + 9x + 6x = x^2 + 15x$

المطلوب هو حلّ المعادلة $x^2 + 15x = 54$ .

اكتب المعادلة على الصورة العامة وحدِّد معاملاتها.

$a = 1$ وَ $b = 15$ وَ $c = -54$

احسب مميّز هذه المعادلة:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 225 - 4 \times 1 \times (-54) = 441$$

للمعادلة جذران مختلفان، لأن المميز موجب. هذان الجذران هما

$$x_1 = \frac{-15+\sqrt{441}}{2} \quad \text{وَ} \quad x_2 = \frac{-15-\sqrt{441}}{2}$$

$$= 3 \quad \text{وَ} \quad = -18$$

الجواب هو 3 لأن الجذر $-18$ غير مقبول، فعرض الممرّ لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا.

**حاول**


حدِّد عرض الممرّ إذا كانت المواد تكفي لتغطية 34 مترًا مربّعًا.

تعلّمت في الدرس السابق أن جذرَي المعادلة التربيعيّة $ax^2 + bx + c = 0$ ما هما إلا الإحداثيان الأولان لنقطتي تقاطع المحور الأول مع بيان الدالّة التربيعيّة $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

## النشاط

### استكشاف جذور المعادلات Exploring Roots of Equations

1. انسخ الجدول أدناه، ثم أكمل العمودين الثاني والثالث، وحدِّد جذرَي كل معادلة.
2. ارسم بيان الدالّة التي قاعدتها الطرف الأول للمعادلة، وحدِّد الإحداثي الأول لرأسها.
أكمل العمودين الأخيرين من الجدول.

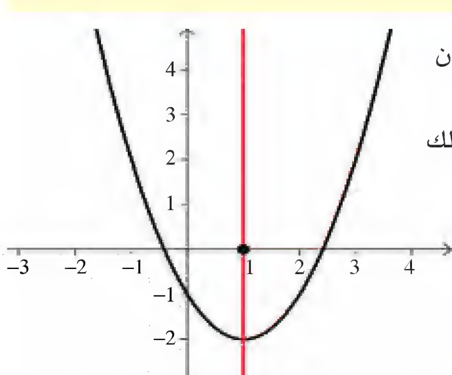
| المعادلة | الجذران | متوسط الجذرين | الدالّة المعرّفة بالمعادلة | الإحداثي الأول للرأس |
|---|---|---|---|---|
| $x^2+2x=0$ | $0,-2$ | $-1$ | $d(x)=x^2+2x$ | $-1$ |
| $-x^2+4=0$ | | | | |
| $x^2+4x+4=0$ | | | | |
| $2x^2+5x-3=0$ | | | | |
| $-x^2-x+4=0$ | | | | |

3. اشرح باختصار كيف تجد الإحداثي الأول لرأس بيان الدالّة التربيعيّة.

**نقطة مراقبة √**

تعلّمت في الدرس السابق من هذا الفصل أنه إذا كان $h$ هو الإحداثي الأول لرأس القطع المكافئ، فإن معادلة محوره هي $x=h$. من ناحية ثانية، يسمح لك تناظر القطع المكافئ حول محوره بإيجاد معادلة المحور، عن طريق حساب متوسط جذرَي المعادلة التربيعية:

$$h=\frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2a}=\frac{-b}{2a}$$




معادلة محور القطع المكافئ هي $x=-\frac{b}{2a}$ .

**مثــــال** 4

**اكتب معادلة محور التناظر لبيان الدالّة $f(x)=19+8x+2x^2$، وحدِّد إحداثيي رأسه.**

**الحـل**

اكتب قاعدة الدالّة على صورتها العامّة $f(x)=2x^2+8x+19$ تجد أن $a=2$ وَ $b=8$ .

معادلة محور التناظر هي $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{4}=-2$ .

إحداثيا رأس القطع المكافئ هما: $x=-2$ وَ $y=f(-2)=2(-2)^2+8(-2)+19=11$

فتكون النقطة $(-2, 11)$ رأس بيان الدالّة التربيعيّة.

**حـــاولْ** اكتب معادلة محور التناظر لبيان الدالّة $f(x)=x^2-4x+1$ وحدِّد إحداثيي رأسه.

**تفكير ناقد** ماذا تستطيع أن تقول عن مميز معادلة تربيعيّة جذراها عددان صحيحان؟

# التمـــــــاريـــــــن

## التواصل في الرياضيات

1 اشرح طريقتين لتحديد الإحداثيات الأولى لنقاط تقاطع المحور الأول مع القطع المكافئ $y=x^2+2x-3$ .

2 اشرح طريقة لتحديد إحداثيي رأس القطع المكافئ.

3 ما العلاقة بين رأس القطع المكافئ ومحوره؟

## تمارين موجَّهة

**استعمل القانون لتحديد جذرَي المعادلة.**

4 $x^2-5x+4=0$

5 $2x^2-5x=3$

6 استعمل القانون لحل المعادلة التربيعيّة $3x^2-3x=4$ . اكتب الحلّين مضبوطين، ثم قرّبهما إلى أقرب عُشر.

**اكتب معادلة محور التناظر للقطع المكافئ، وحدِّد إحداثيي رأسه.**

7 $f(x)=x^2-x-2$

8 $f(x)=2x^2-12x+11$

## تمارين وتطبيقات

**استعمل القانون لحل المعادلة التربيعيّة. اكتب الحلول مضبوطة (من دون تقريب).**

9 $x^2+7x+9=0$

10 $x^2+6x=0$

11 $(x+1)(x-2)=5$

12 $(x-4)(x+5)=7$

13 $t^2-9t+5=0$

14 $x^2-3x-1=0$

15 $x^2+9x-2=-16$

16 $x^2-5x-6=18$

17 $5x^2+16x-6=3$

18 $4x^2=-8x-3$

19 $3x^2-3=-5x-1$

20 $x^2+3x=2-2x$

21 $x^2+6x+5=0$

22 $x^2+10x=5$

23 $-2x^2+4x=-2$

24 $5x^2-2x-3=0$

25 $-6x^2+3x+19=0$

26 $-x^2-3x+1=0$

**اكتب معادلة محور التناظر للقطع المكافئ، واكتب إحداثيي رأسه.**

27 $y=7x^2+6x-5$

28 $y=x^2+9x+14$

29 $y=3+7x+2x^2$

30 $y=10-5x^2-15x$

31 $y=3x^2+6x-18$

32 $y=14+8x-2x^2$

33 $y=4-10x+5x^2$

34 $y=-x^2-6x+2$

35 $y=3x^2+21x-4$

36 $y=-2x^2+3x-1$

**37** $y=3x^2-18x+22$

**38** $y=-2x^2+8x+13$

**39** $y=3x-2x^2+2$

**40** $y=-1-8x+12x^2$

**41** $y=7x^2-12x+2$

**42** $y=2x-2+x^2$

**43** $y=4x^2-3x-8$

**44** $y=9-3x^2$

**45** $y=5x-x^2$

**46** $y=5x^2+2x-3$

**47** برهن أنه إذا كان أحد جذرَي المعادلة التربيعيّة $ax^2+bx+c=0$ هو مقلوب الآخر فإن $a=c$.

**48** **تسلية** أطلق كالى بعض الألعاب النارية عموديًّا في الهواء بسرعة أساسية بلغت 58.8 مترًا بالثانية. يمكنك اعتبار الدالّة $h(t)=-4.9t^2+58.8t$ نموذجًا لحساب ارتفاع الألعاب النارية $h$ بعد $t$ ثانية.

أ) ما المدة التي تستغرقها الألعاب النارية لتصل إلى ارتفاعها الأعلى؟

ب) ما الارتفاع الأعلى الذي تبلغه هذه الألعاب؟

**49** **صناعة** طلب رئيس إدارة مصنع إلى مستشاره أن يساعده على تحديد سعر مبيع زهرية. بعد تحليل تكاليف الإنتاج وطلب المستهلكين على الزهريات، توصَّل المستشار إلى دالّة تمثّل ربح المصنع من بيعه الزهريات. وهذه الدالّة هي $P(x)=-0.3x^2+75x-2000$ حيث يمثّل $x$ سعر مبيع الزهرية.

أ) حدّد سعر مبيع الزهرية للحصول على أكبر ربح.

ب) ما قيمة الربح الأكبر؟

ج) حدّد سعري المبيع اللذين يحقّقان ربحًا يساوي الصفر.

د) ما قيَم $x$ التي تمكّن الشركة من تحقيق أرباح؟

هـ) ما قيَم $x$ التي تضع المصنع تحت خسارة؟

## نظرة إلى الوراء

**اكتب معادلة على الصورة $y=mx+b$ ، للمستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة، ويكون متعامدًا مع المستقيم المعطى.**

**50** $(-2, 3)$ ، $y=x-5$

**51** $(4, -6)$ ، $2x-y=1$

**اكتب معادلة على الصورة $y=mx+b$ ، للمستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة ويكون موازيًا للمستقيم المعطى.**

**52** $(8, -1)$ ، $y=-3x+12$

**53** $(-4, -2)$ ، $5x=4-y$

**حُلَّ المتباينة ومثِّل مجموعة الحلِّ على محور الأعداد.**

**54** $|x+6|>6$

**55** $|x-5|<5$

**56** $|-4x|\leq 8$

**57** $|8-2x|\geq 6$

## نظرة إلى الأمام

**58** هل يمكنك أن تجد في مجموعة الأعداد الحقيقيّة حلاًّ للمعادلة التربيعيّة $2x^2+5x+6=0$؟ اشرح مستعينًا بقانون حل المعادلة التربيعيّة.




# المتباينات التربيعيّة Quadratic Inequalities



**لماذا** الكثير من المسائل الحياتيّة، مثل تلك التي تتعلّق بالأرباح التجاريّة نسبة إلى المردود والكلفة، يمكنك حلّها عن طريق حل متباينات تربيعيّة.

**الأهداف**

- يكتب متباينة تربيعيّة ويحلّها، ويمثّل مجموعة الحلّ بيانيًّا.

**تطبيقات**
تجارة

تخيط سوزان قمصانًا وتبيعها. قام أخوها بدراسة تتناول الكلفة والأسعار والمردود (بآلاف بالدنانير)، فوجد أن الكلفة الشهرية $C$ وسعر القميص $p$ تربطهما العلاقة التالية: $C(p)=75p+2500$؛ وأن المردود $R$ والسعر $p$ تربطهما العلاقة التالية: $R(p)=-25p^2+700p$. وهكذا فإن أرباح سوزان تتحدّد بالعلاقة التالية بين الربح $G$ وسعر المبيع $p$:

$$\begin{aligned} G(p) &= R(p)-C(p) \\ &= -25p^2+700p-(75p+2500) \\ &= -25p^2+625p-2500 \end{aligned}$$

كيف يجب على سوزان أن تحدّد سعر القميص $p$ لكي تحقّق أرباحًا أو، بترجمة رياضية، كيف على سوزان أن تختار قيمة المتغيّر $p$ لكي تحقّق المتباينة $-25p^2+625p-2500>0$؟

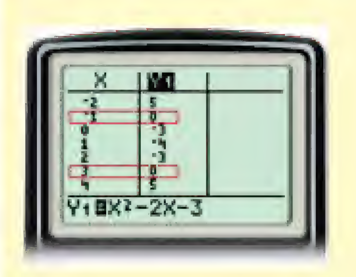
## النشاط

### استكشاف المتباينات التربيعيّة Exploring Quadratic Inequalities

**تكنولوجيا**
الحاسبة البيانية



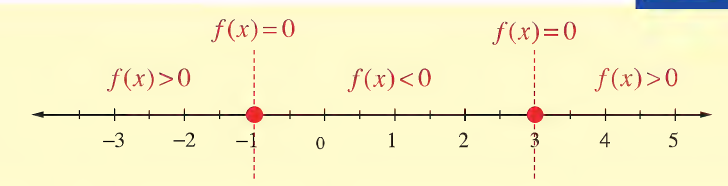
سوف تحتاج إلى حاسبة بيانيّة.




يبيّن الجدول المقابل قيم الدالّة العائدة $f(x)=x^2-2x-3$ إلى القيم الصحيحة التي يتّخذها المتغيّر $x$ بين $-2$ وَ 4. إذا أمعنت النظر في الجدول تلاحظ أنه يبيّن ثلاث حالات:

- $f(x)=0$ إذا كان $x=-1$ أو $x=3$.
- $f(x)>0$ إذا كان $x<-1$ أو $x>3$.
- $f(x)<0$ إذا كان $-1<x<3$.

## النشاط




1. انسخ الجدول التالي وأكمله. ما قيَم $x$ التي تحقِّق المعادلة؟ وما قيَم $x$ التي تحقِّق المتباينة؟

| الدالّة | عدد نقاط تقاطع بيانها مع المحور الأول | قيَم $x$ حيث $f(x)=0$ | قيَم $x$ حيث $f(x)>0$ | قيَم $x$ حيث $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)=x^2-4$ | 2 | | | |
| $f(x)=-x^2+2x+3$ | | | | |

2. كرِّر الأمر مع الجدول التالي:

| الدالّة | عدد نقاط تقاطع بيانها مع المحور الأول | قيَم $x$ حيث $f(x)=0$ | قيَم $x$ حيث $f(x)>0$ | قيَم $x$ حيث $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)=x^2$ | 1 | | | |
| $f(x)=-x^2$ | | | | |

3. كرِّر الأمر مع الجدول التالي:

| الدالّة | عدد نقاط تقاطع بيانها مع المحور الأول | قيَم $x$ حيث $f(x)=0$ | قيَم $x$ حيث $f(x)>0$ | قيَم $x$ حيث $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)=-x^2+x-1$ | 0 | | | |
| $f(x)=x^2+x+3$ | | | | |

**نقطة مراقبة √**

4. أ إذا قطع بيان الدالّة المحور الأول في نقطتين، فإنه يقسّم المحور إلى ـــــــ فترات مختلفة.

ب إذا قطع بيان الدالّة المحور الأول في نقطة واحدة، فإنه يقسم هذا المحور إلى ـــــــ مختلفتين.

ج إذا لم يقطع بيان الدالّة المحور الأول فإنه ـــــــ يقسم هذا المحور إلى فترات مختلفة.

يمكنك أن تحدِّد مجموعة الحلّ لمتباينة تربيعية عن طريق تحديد جذرَي المعادلة التربيعيّة المرافقة لها، أو عن طريق رسم بيان الدالّة التربيعيّة المرافقة لها.

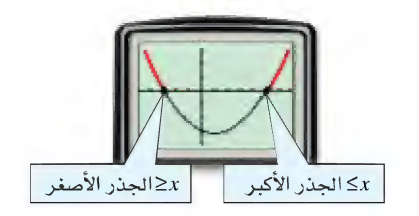
**مثـــــال** 1 **حُلَّ المتباينة $x^2-2x-15\ge 0$ ، ومثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد.**

تكنولوجيا
الحاسبة البيانية

الحــل

يدلّ بيان الدالّة التربيعيّة المرافقة للمتباينة على أن مجموعة الحلّ تتكوّن من قسمين:

**$x\le$ الجذر الأصغر أو $x\ge$ الجذر الأكبر**




$$x^2-2x-15=0$$
$$(x+3)(x-5)=0$$
$$x=5 \text{ أو } x=-3$$

وهكذا، فإن مجموعة الحلّ للمتباينة هي مجموعة قيم $x$ التي تحقّق $x\le -3$ أو $x\ge 5$ .

−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

**حـــاول** حُلَّ المتباينة $x^2-8x+12\ge 0$ . مثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد.

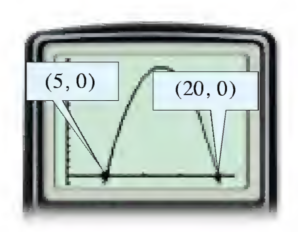
**مثـــــال** 2 بالعودة إلى أول الدرس، كيف يجب على سوزان أن تحدِّد سعر القميص $p$ لكي تحقّق ربحًا؟



تكنولوجيا
الحاسبة البيانية

الحــل

حُلَّ المعادلة التربيعيّة $-25p^2+625p-2500=0$




باستعمال القانون.

مميّز المعادلة هو $\Delta=625^2-4\times(-25)\times(-2500)=140\ 625$

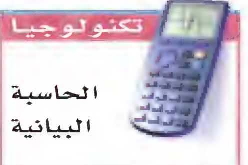
الجذران هما $p=\frac{-625\pm 375}{-50}=\begin{cases}5\\20\end{cases}$

يدلّ بيان الدالّة $y=-25x^2+625x-2500$ أن سوزان تحقّق ربحًا إذا حدّدت سعر المبيع بين جذرَي المعادلة، أي بين 5 آلاف دينار و20 ألف دينارًا.

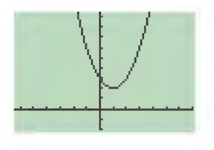


**نقطة مراقبة √** هل تربح سوزان إذا حدّدت سعر المبيع بعشرين ألف دينارًا؟

**مثـــــال** 3 **حُلَّ المتباينة $x^2-2x+3\le 0$ ، ومثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد.**




الحــل



يُظهر بيان الدالّة المرافقة للمتباينة أن قيَم الدالّة موجبة أيًّا تكن القيمة المعطاة للمتغيِّر $x$. هذا يعني أنه لا توجد قيم للمتغيّر $x$ تحقّق المتباينة. تعبِّر عن ذلك بالقول إن مجموعة الحلّ للمتباينة خالية **Empty**.

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1 أوضح كيف تحلّ المتباينة $x^2-2x-8\geq 0$ .

2 أوضح كيف يساعدك الرسم البياني على حلّ المتباينة $x^2-2x-8>0$ .

3 أوضح كيف تجد حلّ المتباينة $(x-2)^2<0$ من دون استعمال الرسم البياني.

## تمارين موجَّهة

4 حُلَّ المتباينة $x^2-7x+12\geq 0$ ومثِّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد.

5 ما القيم الصحيحة للمتغيِّر $x$ التي تحقِّق $-2x^2+25x-72>0$ ؟

## تمارين وتطبيقات

**حلّ المتباينة ومثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد.**

6 $x^2-1\geq 0$

7 $-x^2+5x-6>0$

8 $x^2-8x+12\leq 0$

9 $x^2-4x-5<0$

10 $x^2-7x+10\leq 0$

11 $50-15x>-x^2$

12 $x^2\leq \frac{3}{4}+x$

13 $x^2-x-12\leq 0$

14 $-x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{9}>0$

15 $x^2-4x-12>0$

16 $x^2-2x-99>0$

17 $x^2+x-6\leq 0$

18 $x^2-x+20<0$

19 $x^2\leq 7x-6$

20 $x^2+35>-12x$

21 $10-x^2\geq 9x$

22 $x^2+10x+25>0$

23 $x^2+3x-18>0$

24 $x^2-2>x$

25 $x^2+6x\geq 7$

26 $15-8x\leq -x^2$

27 $-x^2+3x+6<0$

28 $4x-1>8-x^2$

29 $x^2+5x-7<4x$

**تحدٍّ**

30 اكتب دالّة تربيعيّة $f(x)$ تحقّق $f(x)\geq 0$ لقيَم $x$ الواقعة بين 2 وَ 6، بما فيها هاتان القيمتان.

31 اكتب متباينة تربيعيّة تكون مجموعة حلّها $x<3$ أو $x>7$ .

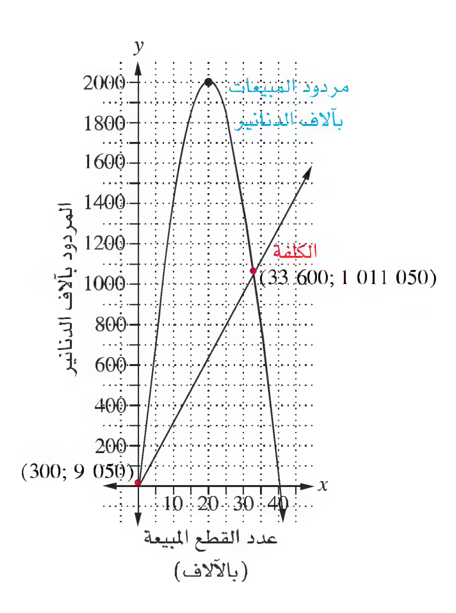
## تطبيقات

تذكّر أن القدم وحدة إنجليزية لقياس الطول تساوي 30cm تقريبًا.

**32** **رياضة** قام الحكَم، في بداية مباراة كرة السلّة، برمي الكرة في الهواء عموديًّا. تمثّل الدالّة التربيعيّة $h(t)=-16t^2+24t+5$ نموذجًا رياضيًّا لدراسة ارتفاع الكرة بدلالة الوقت، حيث يمثّل $h$ ارتفاع الكرة بالأقدام ويمثّل $t$ عدد الثواني بعد رمي الكرة. بين أي ثانيتين يكون ارتفاع الكرة أكبر من 9 أقدام؟

**33** **تجارة** تمثّل الدالّة $y=-0.1x^2=8x-50$ نموذجًا رياضيًّا لدراسة الربح الناتج عن بيع $x$ وحدة من منتج صناعي. ما الحد الأدنى للوحدات المبيعة الذي يؤمّن ربحًا للبائع؟

**34** **تجارة** قامت إحدى الشركات بدراسة تكاليف إنتاج ومبيع أحد منتجاتها وتوصّلت إلى أن الدالّة $C(x)=50+30x$ تشكّل نموذجًا لكلفة الإنتاج، وأن الدالّة $R(x)=5x(40-x)$ تشكّل نموذجًا لمردود المبيعات حيث يمثّل $x$ عدد القطع المبيعة بالآلاف. أما الربح المحقّق فيتمثّل بالدالّة $P(x)=R(x)-C(x)$ .
استعمل الرسم البياني التالي للإجابة عن الأسئلة.




أ) بين أي قيمتين يجب أن يكون عدد القطع المبيعة، لكي يتم تحقيق أرباح؟

ب) كم عدد القطع المبيعة الذي يؤمّن أعلى ربح؟

ج) هل هناك كلفة كبرى لا يمكن تجاوزها؟ أوضح ذلك.

د) ارسم بيان دالّة الربح.

هـ) ابتداءً من أي كميّة مبيعة تبدأ الشركة بالخسارة؟

## نظرة إلى الوراء

**أنشئ الرسم البياني لكل علاقة، وحدّد إن كانت العلاقة دالّة أو لا.**

35. $y=|x|$ 36. $x=|y|$ 37. $x=y^2$

**حُلَّ المعادلة بكتابة الجذور مضبوطة.**

38. $-2x^2=-16$ 39. $-3x^2+15=-6$ 40. $32=2x^2-4$

## نظرة إلى الأمام

41. حدِّد قيمة $b$ بحيث يمرّ بيان الدالّة $y=x^3-2x^2+3x+b$ بالنقطة $(9, 1)$.
تحقَّق من جوابك بالتعويض عن $b$ بالقيمة المحدَّدة، وإنشاء بيان الدالّة.









يتولّد كثير من المتتاليات العددية من دوالّ تستطيع تعرّفها.
أمعن النظر في متتالية الأعداد المربّعة.

| **n** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | . . . | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **S(n)** | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | . . . | $n^2$ |

الحدود الأولى في هذه المتتالية هي $1^2$، $2^2$ ، $3^2$ ، $4^2$، $5^2$، $6^2$ ، $7^2$. يبدو من دراسة هذه الحدود الأولى أن الحدّ ذا الرتبة $n$ أو الحدّ النوني هو $n^2$. تستنتج من ذلك أن الدالّة $f(x)=x^2$ تولّد هذه المتتالية بحيث يكون الحد النوني $f(n)=n^2$ بالتعويض عن المتغيّر $x$ بالعدد الطبيعي $n$.

كيف تحدِّد دالّة تولّد متتالية حدودها الأولى معروفة؟ إحدى الطرائق للقيام بذلك هي طريقة الفروق المنتهية. تستطيع استعمال هذه الطريقة عندما تلاحظ أن المتتالية تؤدّي إلى فروق ثابتة عند مستوى معيّن. تأمل المتتالية التالية:

| $n$ | 1 | | 2 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 0 | | 5 | | 12 | | 21 |
| الفروق الأولى | | 5 | | 7 | | 9 | |
| الفروق الثانية | | | 2 | | 2 | | |

تلاحظ أن الفروق الثانية، أو الفروق عند المستوى الثاني، متساوية. تقضي الطريقة في هذه الحالة بالبحث عن دالّة تربيعيّة تصلح لتوليد المتتالية. اكتب $f(n)=an^2+bn+c$ ، وحاول أن تحدِّد قيَم المعاملات باستعمال قيَم $n$ والحدود التي تقابلها.

$$f(n)=an^2+bn+c$$
$$f(1)=a(1)+b(1)+c=a+b+c$$
$$f(2)=a(2)^2+b(2)+c=4a+2b+c$$
$$f(3)=a(3)^2+b(3)+c=9a+3b+c$$
$$f(4)=a(4)^2+b(4)+c=16a+4b+c$$

| $n$ | 1 | | 2 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | $a+b+c$ | | $4a+2b+c$ | | $9a+3b+c$ | | $16a+4b+c$ |
| | | $3a+b$ | | $5a+b$ | | $7a+b$ | |
| | | | $2a$ | | $2a$ | | |

إن مقارنة بسيطة بين هذا الجدول وجدول الفروق أعلاه تسمح بكتابة المعادلات التي تحقّقها معاملات الدالّة التربيعيّة:

$a+b+c=0$ $\qquad$ $3a+b=5$ $\qquad$ $2a=2$

حُلَّ نظام المعادلات الذي حصلت عليه بالتعويض.

- $2a=2$ إذًا $a=1$
- $3a+b=5$ إذًا $b=2$
  $3+b=5$
- $a+b+c=0$ إذًا $c=-3$
  $1+2+c=0$



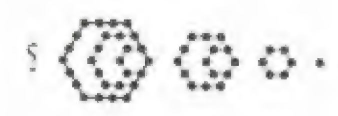
ما سبق يسمح لك باستخلاص أن الدالّة $f(n)=n^2+2n-3$ تولّد المتتالية المعطاة.
تحقَّق من النتيجة عبر التعويض عن $n$ بالقيم 5 وَ 6 وَ 7 علمًا بأن المتتالية هي: 0، 12، 21، 32، 45، 60،....

## النشاط 1 تحديد دالّة تربيعيّة

شكّل مجموعات من تلميذين أو أكثر، واختر رئيسًا لكل مجموعة. يختار الرئيس، بعيدًا عن زملائه، دالّة تربيعيّة معاملاتها أعداد صحيحة ويستعملها لتوليد متتالية من 5 أعداد. يعرض الرئيس المتتالية فقط على بقية أعضاء الفريق ويطلب إليهم إيجاد الدالّة.

## النشاط 2 تحديد المعادلة التربيعيّة للأعداد السداسية

صمّم المهندس المعماري العمارة المبيّنة في الصورة. إذا نظرت إلى هذه العمارة تجد فيها سداسيات نظامية، الواحد داخل الآخر. يمكنك أن تمثّل هذا المنظر بمتتالية من الأعداد. إذا رمز المتغيّر $n$ إلى عدد النقاط في كل ضلع، فإن أعداد المتتالية تمثّل عدد النقاط في كل شكل من أشكال النمط الهندسي.



اكتب الأعداد الأربعة الأولى في هذه المتتالية.
استعمل طريقة الفروق المنتهية لتجد دالّة تولّد هذه المتتالية.

3

# مراجعة

بيّن أن الدالّة تربيعيّة عبر كتابتها على الصورة العامّة.

1. $f(x)=(x+1)(x-4)$
2. $f(x)=4(2x-1)(3x+2)$

أنشئ بيان الدالّة وأعطِ قيمًا تقريبية لإحداثيي الرأس.

3. $f(x)=-x^2+3x-1$
4. $f(x)=5x^2-x-12$

هل القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى أم إلى أسفل؟ هل للدالّة قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟

5. $f(x)=-x^2-x-1$
6. $f(x)=(x-3)(x+2)$

حُلّ المعادلة واكتب الحلول مضبوطة ومقرّبة إلى أقرب جزء من مئة.

7. $x^2=8$
8. $3x^2=60$
9. $x^2-3=46$
10. $x^2+4=9$
11. $(x-3)^2=64$
12. $(x-5)^2=48$
13. $6(x+1)^2=54$
14. $6(x+2)^2=30$

حُلّ المعادلة بالتحليل.

15. $x^2-10x+24=0$
16. $2x^2-3x-2=0$
17. $6t^2+11t-10=0$

حُلّ المعادلة بإكمال المربّع.

18. $x^2-10x+21=0$
19. $x^2-7x-8=0$
20. $4x^2+4=17x$

اكتب الدالّة على الصورة الرأسية، واكتب إحداثيي رأسها.

21. $f(x)=2x^2-16x+33$
22. $f(x)=-3x^2-6x-7$

حُلّ المعادلة بالقانون.

23. $x^2-7x=-10$
24. $6x=2-5x^2$
25. $x^2=1-x$
26. $2x+1=2x^2$
27. $x^2+6x=-8$
28. $11x=5x^2-3$
29. $x=6x^2-3$
30. $3=x^2+5x$

حدّد إحداثيي رأس القطع المكافئ.

31. $f(x)=x^2+7x+6$
32. $f(x)=x^2-x-12$
33. $f(x)=x^2+2x-3$
34. $f(x)=x^2+12x+5$

حدّد عدد جذور المعادلة باستعمال المميّز.

35. $4x^2-20x=-25$
36. $9x^2+12x=-2$
37. $x^2=21x-110$
38. $-x^2+6x=10$

احسب الضلع المجهول في المثلث القائم. اكتب الجواب مقرّبًا إلى أقرب عُشر.

39. $b=5;\ a=4$
40. $a=1;\ c=4$
41. $c=12;\ b=7$
42. $c=15;\ a=12$
43. $b=5;\ c=25$
44. $a=6;\ b=6$
45. $c=5.8;\ b=3.2$

a c b

# 3 اختبار الفصل

**اكتب معادلة الدالّة على الصورة العامة**

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

**محدّدًا معاملاتها. حدّد وجهة انفتاح القطع المكافئ وإن كان رأسه يمثّل قيمة كبرى أو قيمة صغرى.**

**1** $f(x)=(x+3)(x-4)$

**2** $f(x)=-5(x+1)(x-7)$

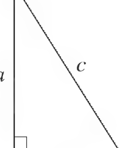
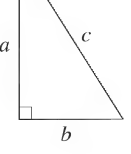
**3** $f(x)=-2(x+3)(3x)$

**حُلّ كل معادلة بكتابة الجذور مضبوطة، ثم قرّبها إلى أقرب جزء من مئة.**

**4** $3x^2=81$

**5** $(x-7)^2=12$

**احسب طول الضلع الثالث في المثلّث القائم مقرّبًا إلى أقرب عشر.**


**6** $a=7$ ؛ $b=9$

**7** $a=2$ ؛ $c=4$

**8** $b=8$ ؛ $c=9.2$

**استعمل التحليل وخاصية الضرب الصفري لإيجاد صفرَي كل دالّة تربيعيّة.**

**9** $f(x)=-x^2-9x$

**10** $f(x)=4x^2-64$

**11** $f(x)=4x^2-4x+1$

**12** $f(x)=x^2-3x-10$

**13** **نظرية الأعداد** عددان ناتج ضربهما 90. أحد العددين يزيد 3 على ضعف الآخر. اكتب معادلة تربيعية جذراها هذان العددان، ثم حُلَّ هذه المعادلة بالتحليل واستعمال خاصية الضرب الصفري.

**حُلّ كل معادلة تربيعيّة بإكمال المربّع.**

**14** $x^2-8x+4=0$

**15** $2x^2-11x+5=0$

**16** **هندسة** مثلث مساحته 30 مترًا مربعًا، يقلّ ارتفاعه 4m عن قاعدته. ما قاعدة المثلّث وما ارتفاعه؟

**حُلّ كل معادلة تربيعيّة بالقانون.**

**17** $x^2-2x-5=0$

**18** $-3x^2+15=12$

**اكتب معادلة محور التناظر وإحداثيي رأس القطع المكافئ.**

**19** $y=x^2-7x+10$

**20** $y=3x^2+18x+6$

**استعمل المميّز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعيّة.**

**21** $x^2-8x+4=0$

**22** $-3x^2=5+3x$

**23** $4x^2=27$

**حُلّ كل متباينة تربيعيّة، ومثّل الحل على محور الأعداد.**

**24** $x^2-x-12>0$

**25** $-2x^2+4x+6\geq 0$

**26** $2\leq x^2+4x-3$

**27** $1>-x^2-2x-6$

# 3 اختبار تراكمي

**1** ما عدد جذور المعادلة $5x^2+2x+1=0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية؟

أ 2 ب 0
ج 1 د غير ذلك

**2** أي زوج مرتّب يمثّل حلّ النظام الخطّي؟

$$\begin{cases}5x+y=11\\3x+2y=8\end{cases}$$

أ $(2, 1)$ ب $(3, 2)$
ج $(-1, 2)$ د $(5, 6)$

**3** بسِّط المقدار $\frac{x^2y^{-1}}{x^{-3}y^2}$.

**4** ما تحليل المقدار $x^2+5x+6$ ؟

أ $(x+1)(x+6)$
ب $(x-2)(x-3)$
ج $(x-1)(x-6)$
د $(x+2)(x+3)$

**5** أي وصف يناسب النظام الخطّي؟

$$\begin{cases}2x+5y=3\\4x+10y=6\end{cases}$$

أ مستحيل ب غير محدد
ج محدد د غير ذلك

**6** حُلّ بيانيًّا المتباينة $-\frac{1}{3}x\leq 6$ .

**7** حُلّ النظام الخطّي $\begin{cases}3x-2y=2\\x+y=4\end{cases}$

**8** حُلّ المعادلة $x^2+3x+1=0$ .

**9** اكتب معادلة دالّة تحصل على بيانها من بيان الدالّة $f(x)=x^2$ بسحب أفقي نحو اليسار مداه 3.

**10** ما قيمة الدالّة $f(x)=11-\frac{1}{2}x$ عندما $x=-6$ ؟

**11** **كيمياء** يريد أحد العلماء أن يركّب 60ml من محلول نسبة الملوحة فيه 5%، باستعمال محلولين تبلغ نسبة الملوحة في الأول 2% وفي الثاني 12%. ما الكمّية التي يتوجّب أن يستعملها من كل محلول؟

**12** احسب قيمة المقدار $8^{\frac{2}{3}}$ ؟

**13** اكتب المقدار على أبسط صورة $\frac{(3^2-7)^2}{3^{(2^2-1)}}$ .

**14** احسب مميِّز المعادلة $x^2+4x+1=0$ .

**15** حدِّد نوع القيمة القصوى للدالّة أدناه (صغرى أم كبرى) وحدّد قيمتها:

$$f(x)=-x^2+2x+1$$

**16** **فيزياء** رمى ديلان كرة من ارتفاع 3 أمتار. احسب، مُقرِّبًا إلى أقرب عُشر من الثانية، الوقت اللازم لوصول الكرة إلى الأرض. استعمل الدالّة

$$h(t)=-5t^2+3$$

حيث يرمز $h$ إلى ارتفاع الكرة بالأمتار، ويرمز $t$ إلى الوقت بالثواني.

**17** **تجارة** تزاول شركة الوطن بيع نوع من الحاسبات تشكّل الدالّة

$$P(x)=-x^2+90x+497975$$

نموذجًا لدراسة أرباح الشركة، حيث يرمز $x$ إلى سعر الحاسبة وَ $P$ إلى ربح الشركة. ما السعر الذي يؤمِّن أكبر ربح ممكن للشركة؟ اكتب الجواب مقرَّبًا إلى أقرب ألف دينار.

GRADE10-chap4-13-final 5/10/13 11:36 AM Page 143

## الفصل الرابع

# الدوالّ الحدوديّة




# الدّوالّ الحدوديّة

## Polynomial Functions

غالبًا ما تُستعمل الحدوديّات لصياغة قوانين حساب المساحات والحجوم وفي المسائل ذات العلاقة بالجاذبية ومسائل الاستهلاك. كما تُستعمل في العديد من حالات الحياة اليومية. مثال على ذلك، تُستعمل الدوالّ الحدودية لحساب حجوم العمارات غير المنتظمة، كالعمارة المبيّنة في الصورة. سوف تتعلّم في هذا الفصل كيف تجري العمليات على الدوالّ، وكيف تنشئ خطوطها البيانية وتحدّد جذورها.

الدروس

الجناح الشرقي من متحف الفنون في العاصمة الأميركية واشنطن.

## حول مشروع الفصل

سوف تستعمل في هذا الفصل الدوالّ الحدوديّة لإنشاء نماذج لحالات الحياة اليومية. يكون النموذج جيّدًا إذا سمح بالإجابة عن السؤال المطروح، أو حلّ المسألة التي أنشئ النموذج لحلها. سوف تقوم، عبر اشتغالك على مشروع الفصل، بتخمين أشكال الأوعية، مستعملاً دالّة حدودية تتوصّل إليها انطلاقًا من العلاقة بين حجم الماء الموجود في الوعاء وارتفاعه داخلها.

بعد انتهائك من مشروع الفصل، سوف تصبح قادرًا على:

- جمع المعطيات وتنظيمها.
- تحديد الدالّة الحدودية الأقرب لتمثيل العلاقة بين المعطيات.
- التحقُّق من صحّة النموذج.







# الحـــدوديّـــات Polynomials



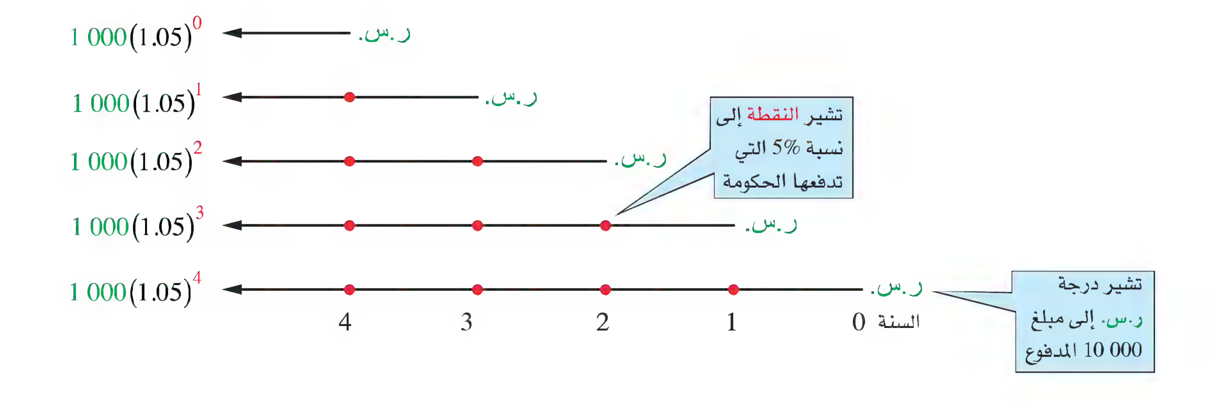

**الأهداف**

- يميّز الحدودية ومعاملاتها ودرجتها
- يحسب قيمة حدودية بالتعويض
- يجمع الحدوديات ويطرحها

**تطبيـــقات**
**تـوفيــر**

أنشأت الحكومة في أحد البلدان صندوقًا خاصًا لتشجيع العاملين في دوائرها على تجميع مبلغ من المال يعينهم أيام الشيخوخة. يودع كل عامل حسابه في الصندوق ما يعادل 1 000 ألف دينار في بداية كل عام، وتدفع الحكومة عنه ما يساوي 5% من مجموع ما يحتويه حساب العامل، ابتداء من السنة صفر. يبيّن المخطط أدناه نموّ موجودات رزكار في هذا الصندوق على مدى 4 سنوات.

يبيّن الجدول التالي موجودات حساب رزكار في نهاية كل عام:



| نهاية العام | الموجودات |
|---|---|
| 0 | $1\,000$ |
| 1 | $1\,000+1\,000(1.05)$ |
| 2 | $1\,000+1\,000(1.05)+1\,000(1.05)^2$ |
| 3 | $1\,000+1\,000(1.05)+1\,000(1.05)^2+1\,000(1.05)^3$ |
| 4 | $1\,000+1\,000(1.05)+1\,000(1.05)^2+1\,000(1.05)^3+1\,000(1.05)^4$ |

لو دفعت الحكومة 6% أو 7% أو 8% بدلاً من 5% فما عليك إلا أن تغيِّر العدد 1.05 إلى 1.06 أو 1.07 أو 1.08 . إذا رمزت بالمتغيّر $x$ إلى هذا العدد المتغيّر، يمكنك كتابة موجودات حساب رزكار على الشكل التالي:
$1\,000+1\,000x+1\,000x^2+1\,000x^3+1\,000x^4$ . يُدعى مثل هذا المقدار **مقدارًا حدوديًا Polynomial Expression**. إنه مجموع مقادير أبسط يُدعى الواحد منها **حدًا**.

**الحدّ Term** هو مقدار جبري مكوّن من ناتج ضرب عدد في متغيّر أو أكثر، كالمقدار: $3x^2b$ . يمكن للحدّ أن يقتصر على متغيّر واحد، كالحد $5x^2$ ، أو على عدد، كالحد 10، ويُدعى في هذه الحالة **حدًا ثابتًا Constant Term**. العدد في الحدّ الجبري هو **المعامل Coefficient** أو **الجزء الثابت Constant Part**، في حين أن الجزء الآخر هو **الجزء المتغيّر Variable Part**.

على سبيل المثال:
- معامل الحد $x$ هو 1 وجزؤه المتغيّر هو $x$.
- معامل الحد $-2xb$ هو $-2$ وجزؤه المتغيّر هو $xb$ .
- معامل الحد $\frac{-b^3x^2}{2}$ هو $-\frac{1}{2}$ وجزؤه المتغيّر هو $b^3x^2$ .
- معامل الحد $-bc$ هو $-1$ وجزؤه المتغيّر هو $bc$ .

**درجة الحدّ Degree** هي أس المتغيّر إذا كان وحيدًا، وإلاّ فهي مجموع أسس المتغيّرات الموجودة في الحدّ. فدرجة الحد $\frac{-b^3x^2}{2}$ مثلاً هي 5.

**الحدودية Polynomial** هي مجموع حدود. سوف تتعلّم في هذا الدرس الحدوديات في متغيّر واحد. تُعرف بعض الحدوديات بأسماء خاصة. فالحدودية المكوّنة من حدّين تسمّى **ثنائية الحد Binomial**، والتي تتكوَّن من ثلاثة حدود تُسمّى **ثلاثية الحدود Trinomial**.
درجة الحدودية هي الدرجة العليا بين درجات الحدود التي تكوّن هذه الحدودية. يمكنك تصنيف الحدوديات وفقًا لدرجاتها، كما هو مبيّن في الجدول التالي:

| تصنيف الحدوديات وفقًا لدرجاتها | | |
|---|---|---|
| **الدرجة** | **الاسم** | **مثال** |
| 0 | ثابتة | $3$ |
| 1 | خطّية | $5x+4$ |
| 2 | تربيعية | $-x^2+5x-11$ |
| 3 | تكعيبية | $4x^3+x^2+2x+3$ |

**مثــــــال** 1

**ما درجة كل حدودية؟**

أ $4x^2-3x+6x^5$

ب $-2x^3+3x^4+4x^3+5$

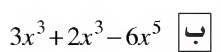
**الحــل**

أ درجات الحدود التي تكوّن الحدودية هي على التوالي: 2 وَ 1 وَ 5. ينتج من ذلك أن درجة الحدودية هي 5.

ب درجات الحدود التي تكوّن الحدودية هي على التوالي: 3 وَ 4 وَ 3 وَ 0. ينتج من ذلك أن درجة الحدوديّة هي 4.

**حـــاولْ** ما درجة كل حدودية؟

أ $4x^2+4-8x-4x^3$

ب  $3x^3+2x^3-6x^5$

## تقييم الحدوديات Evaluating Polynomials

يبيِّن المثال 2 كيف تُستعمل الحدوديّات في حسابات من الحياة اليومية.

**مثــــــال** 2

**ما المبلغ المودَع في حساب رزكار بنهاية السنة الرابعة، إذا دفعت الحكومة 6% بدلاً من 5%؟**

**الحــل**

**طريقة أولى:** استعمال التعويض.

$$y=1000+1000x+1000x^2+1000x^3+1000x^4$$

$$1000+1000(1.06)+1000(1.06)^2+1000(1.06)^3+1000(1.06)^4=5637.09$$

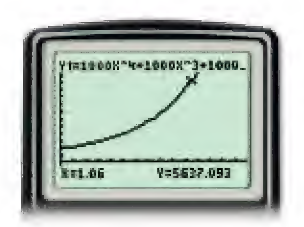
**طريقة ثانية:** استعمال الحاسبة البيانية.

أدخل الدالّة $y=1000+1000x+1000x^2+1000x^3+1000x^4$ في الحاسبة لإنشاء جدول قيَم، أو رسم بيان الدالة. ابحث عن قيمة $y$ عندما يتَّخذ $x$ القيمة 1.06 .










**حـــاولْ** احسب قيمة الحدودية $3x^4+2x^2+2x-5$ حيث $x=1.5$ .

## جمع الحدوديات وطرحها Adding and Subtracting Polynomials

لكي تجمع الحدوديات أو تطرحها، ما عليك إلا أن تجمع معاملات الحدود المتشابهة أو تطرحها. تذكَّر أن الحدود المتشابهة هي التي تتضمَّن القوّة نفسها للمتغيِّر. بعد الانتهاء من عملية التبسيط، اكتب الحدودية على صورتها العامة. **الصورة العامة Standard Form** لكتابة حدودية، هي كتابة حدودها بالتوالي وفقًا للترتيب المتناقص لدرجاتها.

**مثـــــــال**

3 اجمع $(-2x^2-3x^2+5x+4)+(-2x^3+7x-6)$

الحــل

$$(-2x^2-3x^3+5x+4)+(-2x^3+7x-6)$$
$$=(-3x^3-2x^3)+(-2x^2)+(5x+7x)+(4-6)$$
$$=-5x^3-2x^2+12x-2$$

**حـــاولْ** اجمع $(2x^4+4x^3+5x-2)+(-2x^4-7x^2+8x-10)$

**تفكير ناقد** اكتب حدودية $p$ تحقق: $(2x^2-3x+5)+p=0$ .

**مثـــــــال**

4 اطرح $(-6x^3-6x^2+7x-1)-(3x^3-5x^2-2x+8)$

الحــل

$$(-6x^3-6x^2+7x-1)-(3x^3-5x^2-2x+8)$$
$$=(-6x^3-3x^3)+(-6x^2+5x^2)+(7x+2x)+(-1-8)$$
$$=-9x^3-x^2+9x-9$$

**حـــاولْ** اطرح $(3x^3-12x^2+5x+1)-(-x^2+5x+8)$ .

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

1 عرِّف الحدودية بأسلوبك.

2 أوضح كيف تحدِّد درجة حدودية معيّنة.

3 أوضح كيف تجمع حدوديتين، أو تطرح حدودية من أخرى.

4 أوضح كيف تحسب قيمة حدوديّة إذا عرفت قيمة المتغيِّر.

5 أوضح كيف تكتب حدودية على الصورة العامّة.

## تمارين موجّهة

**ما درجة كل حدودية؟**

6 $3x^3-12x^2-5x-12x^5+1$

7 $3x^{10}+3x^2+2$

8 احسب قيمة الحدودية $x^3+2x^2-x+1$ حيث $x=2$ .

9 اجمع $(2x^3+3x^2-x+2)+(-3x^2+4x+5)$ .

10 اطرح $(6x^3-5x^2+14x+3)-(3x^3-2x^2+7x-2)$ .

## تمارين وتطبيقات

اكتب الحدودية على الصورة العامّة.

11 $5x^3+4x+2x^2+1$

12 $4x^4+x^2+x^3+x+1$

13 $2.7x^3+3.3x^8+4.1x^2$

14 $\frac{13}{25}x^4+\frac{5}{7}x^3+\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}$

هل يدلّ المقدار على حدودية؟ حدّد درجتها إن كان الجواب نعم.

15 $7x^5+3x^3-2x+4$

16 $-4x^2+3x^3-5x^6+4$

17 $x^3+2^x-x-7$

18 $4x^2+5x^2-x+1$

19 $0.35x^4+2x^2+3.8x$

20 $7.81x^4+8.9x^3+2.5x^2$

21 $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$

22 $\frac{8}{x^3}-\frac{7}{x^2}+x$

23 $\frac{5}{7}x^6+\frac{2}{3}x^4+5$

24 $\frac{x^5}{7}-\frac{x^3}{3}$

25 $\sqrt{x}-1$

26 $7x\sqrt{x}+4$

احسب قيمة الحدودية عندما يتّخذ المتغيّر $x$ القيمة المُعطاة.

27 $x^3+x^2+1$ ؛ $x=-3$

28 $x^4+2x^3+2$ ؛ $x=-2$

29 $-2x^3-3x+2$ ؛ $x=4$

30 $-4x^3+1+x$ ؛ $x=3$

31 $3x^3+x^2+2x+4$ ؛ $x=5$

32 $5x^3+2x^2-5x+2$ ؛ $x=6$

33 $1+x^2-3x^3$ ؛ $x=2.5$

34 $5x^3+4x+2x^2+1$ ؛ $x=3.8$

35 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ ؛ $x=2$

36 $\frac{3}{10}x^3+\frac{7}{10}x^2+\frac{1}{10}x+\frac{9}{10}$ ؛ $x=10$

اجمع أو اطرح، ثم اكتب الناتج على الصورة العامّة. حدّد درجة الحدوديّة.

37 $(x^3+x^2+x+1)+(2x^3+3x^2+x+3)$

38 $(x^5+x^3+x)+(x^4+x^2+1)$

39 $(1-5x+x^3)-(2x^4+5x^3-10x^2)$

40 $(5x^3+3x^2+8x+2)-(2x^2+4x+7)$

41 $(2x^2-5x+3)+(4x^3+6x^2-2x+5)$

42 $(x^2-5x^3+7)-(6x+x^3+3x^2)$

43 $(x^4+5x^2+x)-(x^4+2x^3+x-4)$

44 $(8x^2+x^3+1-3x)+(2x^3+11x^4)$

45 $(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^3+1)+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x)$

46 $(-3.2x^2+2.7x^3+7.8x)+(4.9x^3+2.5x^4)$

**حدِّد قيَم $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$، لكي تكون المساواة صحيحة.**

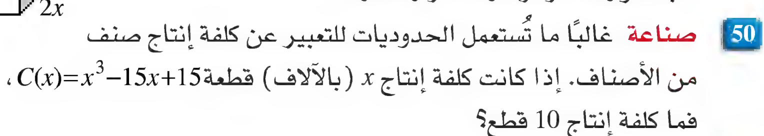
**47** $(11x^3+ax^2-x+b)-(4x^3-3ax+5)=cx^3-2x^2+dx-1$

**48** $(ax^3+2x^2+cx+1)$ يزيد $(5x^3-3)$ على $(3x^2+bx^2+d-7x)$ .

ربــــط

تطبيـــقات

**49** **هندسة** احسب، بدلالة $x$، المقدار الجبري للمساحة الكلية لوجوه علبة طولها $7x$ وعرضها $2x$ وارتفاعها 3.




**50** **صناعة** غالبًا ما تُستعمل الحدوديات للتعبير عن كلفة إنتاج صنف من الأصناف. إذا كانت كلفة إنتاج $x$ (بالآلاف) قطعة $C(x)=x^3-15x+15$، فما كلفة إنتاج 10 قطع؟

**51** **صناعة** إذا كانت كلفة إنتاج $x$ قطعة $c(x)=3x^3-18x+45$، فما كلفة إنتاج 20 قطعة؟

## نظرة إلى الوراء

**حلِّل.**

**52** $6(x^2-4x)$

**53** $8(x^2+6x)$

**حُلّ كل معادلة.**

**54** $\frac{6x-12x+18}{3}=1$

**55** $-2(b+3)=5-6(2b-7)$

**56** حُلّ النظام الخطي $\begin{cases} 6x=4-2y \\ 12x-4y=16 \end{cases}$

**اكتب العدد على الصورة العلمية.**

**57** 7 100 000

**58** 8 900 000 000

## نظرة إلى الأمام

**59** مربّع مساحته $x^2+6x+9$. احسب ضلعه بدلالة $x$.



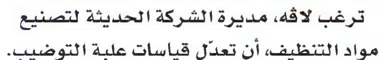


# الدوال الحدوديّة Polynomial Functions

**الأهداف**

- يميّز الدالّة الحدودية.
- يرسم بيان الدالّة الحدودية، ويصف شكله.
- يحلّ مسائل تتضمّن دوالّ حدودية.
- يميّز القيم القصوى المحليّة.
- يدرس تغيُّر الدالّة الحدودية.





ترغب لاڤه، مديرة الشركة الحديثة لتصنيع مواد التنظيف، أن تعدّل قياسات علبة التوضيب.

تعرّفت في الفصول السابقة بعض الدوالّ، مثل الدالّة الخطّية والدالّة التربيعية. تشكّل كل من هاتين الدالّتين حالة خاصَّة لنوع أشمل من الدوالّ هو **الدوالّ الحدودية**.

**الدالّة الحدودية Polynomial Function**

**الدالّة الحدودية** هي دالّة تُكتب قاعدتها على صورة حدودية في متغيِّر واحد.

نشاط

## استكشاف دوالّ حدودية Exploring Polynomial Functions

تطبيقات
صناعة

تقوم الشركة الحديثة لمواد التنظيف بتوضيب أحد منتجاتها في علب طول الواحدة منها 20cm وعرضها 10cm وارتفاعها 30cm. وترغب مديرة الشركة في تعديل قياسات علب التوضيب.

**1.** ما حجم العلبة وما مساحتها الكلّية قبل تعديل قياساتها؟

**2.** تريد المديرة أن يقلَّ حجم العلبة الجديدة 10% عن الحجم الأصلي. كما تريد أن تقلَّ مساحتها الكلية 10% عن المساحة الأصلية. ما حجم العلبة الجديدة وما مساحتها الكلية؟

**3.** قرّرت المديرة ألاّ تغيِّر ارتفاع العلبة وأن يكون طولها ضعف عرضها. احسب حجم العلبة الجديدة ومساحتها الكلية بدلالة عرضها ممثلاً بالمتغيِّر $x$.

نقطة مراقبة √

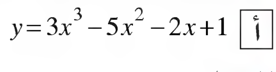
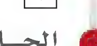
**4.** أكمل الجدول المقابل.

**5.** ما قيمة $x$ التي تعطي حجمًا يقارب الحجم المطلوب؟ هل تعطي هذه القيمة للمتغيِّر مساحة كلية قريبة من المساحة المطلوبة؟ أوضح ذلك.

| $x$ | الحجم | المساحة |
|---|---|---|
| 9.0 | 4860 | 1944 |
| 9.1 | | |
| 9.2 | | |
| 9.3 | | |
| 9.4 | | |
| 9.5 | | |

## مثـــــــال 1

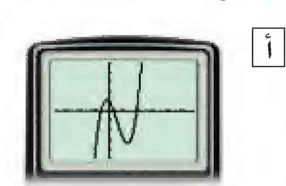
ارسم بيان كل دالّة وصِفْ شكله.

أ $y=3x^3-5x^2-2x+1$ ب $y=x^4-8x^2$

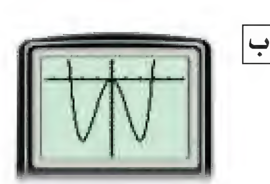
**الحـل**

أ



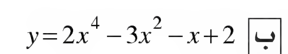
يشبه بيان هذه الدالّة التكعيبيّة الحرف اللاتيني $S$، وهو يتضمّن تحوّلين: واحد على شكل ∪ والثاني على شكل ∩.

ب



يشبه بيان هذه الدالّة من الدرجة الرابعة الحرف اللاتيني $W$، وهو يتضمّن 3 تحوّلات: اثنان منها على شكل ∪ والثالث على شكل ∩.

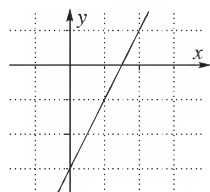
**حــــاولْ** ارسم بيان كل دالّة وصِفْ شكله.



أ $y=-3x^3-2x^2+2x-1$ ب $y=2x^4-3x^2-x+2$

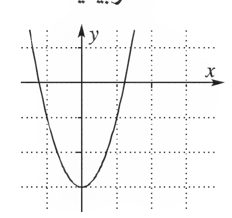
تفحّص شكل بيان كل من الدالّة الخطّية والدالّة التربيعية والدالّة التكعيبية والدالّة من الدرجة الرابعة المبيّنة أدناه.

دالّة خطّية



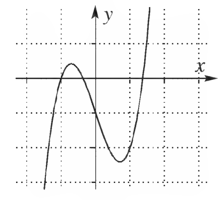

$y=2x-3$

دالّة تربيعية



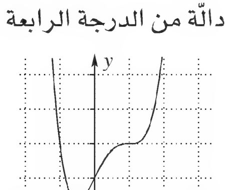

$y=2x^2-3$

دالّة تكعيبية




$y=2x^3-3x-1$

دالّة من الدرجة الرابعة



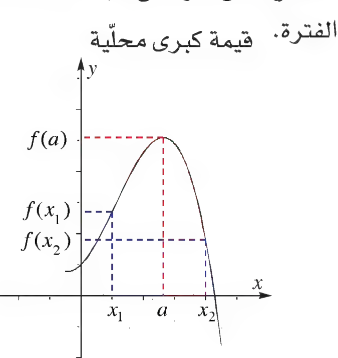

$y=x^4-2x^3+2x+1$

**نقطة مراقبة √** ما مدى الدوالّ ذوات الدرجة الفردية من بين الدوالّ السابقة؟ ماذا تقول عن مدى الدوالّ ذوات الدرجة الزوجية؟

## القيَم القصوى للدالّة الحدودية Extremum of Polynomial Function

عندما يصعد الرسم البياني لدالّة ثم يبدأ بالنزول على فترة من مجالها، تتَّخذ الدالّة **قيمة كبرى محلّية Local Maximum** في هذه الفترة. أما إذا نزل الرسم البياني للدالّة ثم أخذ في الصعود على فترة من مجالها، فتتَّخذ الدالّة **قيمة صغرى محلّية Local Minimum** في هذه الفترة.

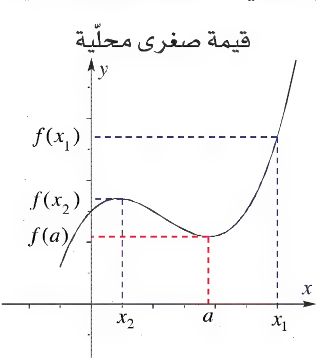
قيمة كبرى محلّية




إذا كان $x \neq a$ في الفترة بين $x_1$ وَ $x_2$

فإن $f(x) < f(a)$

قيمة صغرى محلّية




إذا كان $x \neq a$ في الفترة بين $x_1$ وَ $x_2$

فإن $f(x) > f(a)$

### القيَم القصوى Extremum

تقول عن العدد $f(a)$ أنه **قيمة كبرى محلّية Local Minimum** إذا كان $f(x) < f(a)$ أيًّا تكن قيمة $x$ في جوار $a$ مع $x \neq a$

تقول عن العدد $f(a)$ أنه **قيمة صغرى محلّية Local Maximum** إذا كان $f(x) > f(a)$ أيًّا تكن قيمة $x$ في جوار $a$ مع $x \neq a$.

تقول عن العدد $f(a)$ أنه **قيمة قصوى محلّية Local Extremum** إذا كان قيمة كبرى محلية أو قيمة صغرى محلية.

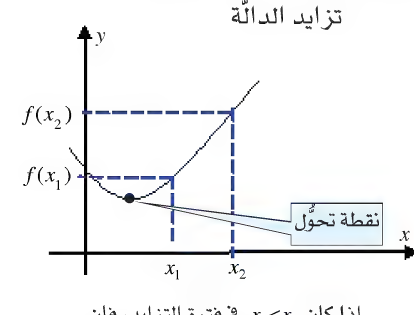
تُدعى نقاط البيان العائدة إلى القيَم القصوى المحلية **نقاط تحوّل Turning Points** في مسار الدالّة. فالدالّة تتحوّل عند مرورها بهذه النقاط من التزايد إلى التناقص، أو بالعكس.

للدالّة التكعيبيّة نقطتا تحوُّل على الأكثر. أما الدالّة من الدرجة الرابعة فلها 3 نقاط تحوُّل على الأكثر. بصورة عامة، فإن عدد نقاط التحوُّل للدالّة الحدودية من الدرجة $n$، هو $n-1$ على الأكثر.

أمعن النظر في الرسمين البيانيين أدناه. لاحظ أن الرسم البياني قد يكون متصاعدًا أو منحدرًا.

نقول عن الدالّة أنها **متزايدة Increasing** على فترة من مجالها، إذا كان بيانها متصاعدًا ضمن هذه الفترة. كما نقول عن الدالّة أنها **متناقصة Decreasing** على فترة من مجالها، إذا كان بيانها منحدرًا ضمن هذه الفترة.

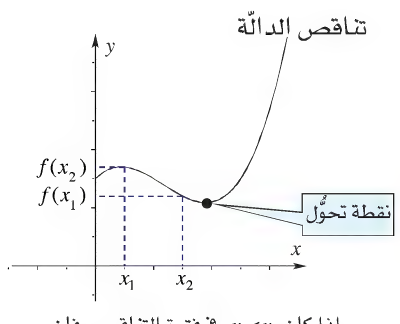
تزايد الدالّة




إذا كان $x_1 < x_2$ في فترة التزايد، فإن

$f(x_1) < f(x_2)$

تناقص الدالّة




إذا كان $x_1 < x_2$ في فترة التناقص، فإن

$f(x_1) > f(x_2)$

## تزايد الدوالّ وتناقصها Increasing and Decreasing Functions

$x_1$ وَ $x_2$ عددان في فترة من مجال الدالّة $f(x)$.

تكون الدالّة **متزايدة** في هذه الفترة إذا حقّقت الشرط أدناه:

إذا كان $x_1 < x_2$، فإن $f(x_1) < f(x_2)$

تكون الدالّة **متناقصة** في هذه الفترة إذا حقّقت الشرط أدناه:

إذا كان $x_1 < x_2$، فإن $f(x_1) > f(x_2)$

### مثال 2

**ارسم بيان الدالّة $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ .**

أ قرّب القيَم القصوى إلى أقرب عُشر.

ب حدِّد فترات تزايد الدالّة وفترات تناقصها.

(−2.2, ≈1.3)

(0.2, ≈−1.3)

**الحـــل**

أ لبيان هذه الدالّة نقطتا تحوُّل.

الأولى تدلّ على قيمة كبرى، 1.3 تقريبًا،

والثانية تدلّ على قيمة صغرى، −1.3 تقريبًا.

ب تتناقص الدالّة على الفترة $-2.2 < x < 0.2$

وتتزايد خارج هذه الفترة.

**تحقّق**

يمكنك استعمال وظيفة الجدولة في الحاسبة البيانية للتحقّق من الإحداثيات التقريبيّة لنقطتَي التحوُّل.




يبيِّن الجدول أعلاه أنه عندما تكون قيَم $x$ في جوار −2 ، تكون قيمة الدالّة، 3، أكبر من القيَم المجاورة. هذا يدلّ على أن الإحداثي الأول لنقطة القيمة الكبرى يقع بين −3 وَ −1 .

يبيِّن الجدول أعلاه أن العدد 1.3 هو تقريب القيمة الكبرى المحلّيّة إلى أقرب عُشر.

يمكنك استعمال الطريقة نفسها للتحقُّق من القيمة الصغرى المحلية.

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1 صفِ الدالّة الحدودية $f(x)=2x^2+x^3+3x+1$ مبيّنًا نقاط التحوُّل وطبيعتها.

2 عرِّف القيمة الكبرى المحلّية، وكذلك القيمة الصغرى المحلية.

3 عرِّف القيَم القصوى المحلية.

4 عرِّف تزايد الدالّة وعرِّف تناقصها.

5 حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لدالّة التمرين 1.

## تمارين موجَّهة

6 ارسم بيان الدالّة $y=x^3+x^2-2x$.

7 ما عدد نقاط التحوُّل لهذه الدالّة؟

8 أعطِ القيَم القصوى مقرَّبة إلى أقرب عُشر.

9 حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص.

## تمارين وتطبيقات

**ارسم بيان الدالّة. حدِّد بيانيًّا القيَم القصوى وطبيعة كل منها، ثم اكتب قيمة تقريبيّة لها مقرّبة إلى أقرب عُشر.**

10 $y=2x^3-5x$

11 $y=x^3+x^2-3x+1$

12 $y=2x^3-4x+1$

13 $y=3x-3-3x^3$

14 $y=-2x+3+x^2$

15 $y=-x^2+6x-11$

16 $y=x^4-5x^2+2$

17 $y=-x^4+x^3+4x^2-3$

18 $y=-3x^3+3x+x^4+3$

19 $y=3x^3-x^4-3x-3$

**ارسم بيان الدالّة وحدِّد فترات تزايدها وفترات تناقصها.**

20 $y=x^3-4x$

21 $y=-2x^3+3x$

22 $y=x^4-2x^2+2$

23 $y=-x^4+3x^2+3$

24 $y=-x^2+4x-1$

25 $y=x^2-6x+7$

26 $y=x^4-3x^3+3x+3$

27 $y=-x^4+3x^3-3x-3$

28 $y=x^3-3x+3$

29 $y=-x^3+4x-2$

**30** يمثّل الشكل المقابل قسمًا من بيان الدالّة
. $y=10x^3-25x^2+x^4-10x+24$
أوضح كيف تستنتج أن نافذة الرسم لا تبيّن جميع
خصائص الدالّة. كيف تُعدِّل النافذة لتصحيح ذلك؟

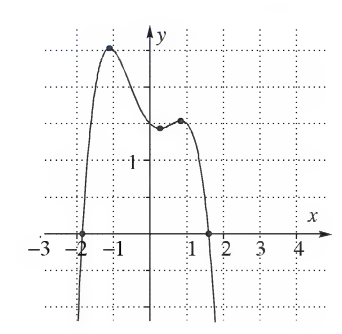
**هندسة اكتب الدالّة الحدودية التي تسمح بحساب المساحة المطلوبة أو الحجم المطلوب.**

**31** حجم مكعّب ضلعه $2x$.

**32** المساحة الكلّية لمكعّب ضلعه $x$ .

**33** المساحة الكلّية لشبه مكعّب ارتفاعه $x$ وطول قاعدته $7x$ وعرضها $3x$.

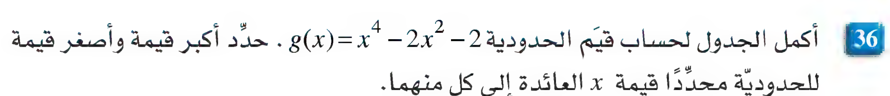
**34** حجم أسطوانة ارتفاعها 5 ونصف قطر قاعدتها $x$ .




**35** يبيّن الشكل المقابل قسمًا من بيان الدالّة
. $f(x)=-x^4+2x^2-x+3$

أ اكتب قيَمًا تقريبيّة لأصفار هذه الدالّة.

ب اكتب قيَمًا تقريبيّة للقيَم القصوى المحلّية
لهذه الدالّة.



## نظرة إلى الوراء

**36** أكمل الجدول لحساب قيَم الحدودية $g(x)=x^4-2x^2-2$ . حدِّد أكبر قيمة وأصغر قيمة للحدوديّة محدِّدًا قيمة $x$ العائدة إلى كل منهما.

| $x$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $0.5$ | $1$ | $1.5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | | | |



## نظرة إلى الأمام

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

**37** $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

**38** $(x-y)(x^2+xy+y^2)$




# ضرب الحدوديات وقسمتها

## Multiplying and Dividing Polynomials

**لماذا**

يمكنك أن تستعين بتحليل الحدوديات لإنشاء نموذج لحجم علبة مكعّبة أو شبه مكعّبة مفتوحة من أعلى.



**الأهداف**

- يضرب حدودية في أخرى.
- يحلِّل حدودية باستعمال المتطابقات المميّزة.
- يستعمل نظرية العامل لاستكشاف عوامل حدودية.
- يقسم حدودية على أخرى.
- يحلّ مسائل باستعمال نظرية العامل ونظرية الباقي.

لكي تصنع علبة شبه مكعَّبة مفتوحة من أعلى باستعمال الورق المقوّى، عليك قص مربّعات على الزوايا الأربع، ثم طي الأطراف وإلصاق بعضها ببعض.
يتحدّد حجم العلبة انطلاقًا من قياسات الورقة والمرّبعات التي عليك قصها. فإذا كان طول الورقة 29cm وعرضها 21cm، فإن حجم العلبة سيكون $V(x)=x(29-2x)(21-2x)$، حيث يرمز $x$ إلى ضلع المرّبعات المطلوب قصّها.

29, $x$, $x$, 21, $29-2x$, $12-2x$




## ضرب الحدوديّات — Multiplying Polynomials

**مثـــال 1** اكتب حجم العلبة $V(x)=x(29-2x)(21-2x)$ كحدودية على الصورة العامة.

**الحل**

$$\begin{aligned} V(x)&=x(29-2x)(21-2x)\\ &=x\left[29(21-2x)-2x(21-2x)\right]\\ &=x\left[609-58x-42x+4x^2\right]\\ &=x\left[609-100x+4x^2\right]\\ &=609x-100x^2+4x^3\\ &=4x^3-100x^2+609x \end{aligned}$$

**تحقّق**

يمكنك أن تتحقّق من صحّة الضرب عن طريق رسم بيان الدالّة $V(x)$ مكتوبة على صورتها الأولى وعلى الصورة العامة. إذا تطابق البيانان يكون الضرب صحيحًا.

يبدو أن البيانين يتطابقان

**حــاولْ** اكتب الدالّة $f(x)=2x^2(x^2+2)(x-3)$ كحدودية على الصورة العامّة.

## تحليل الحدوديات Factoring Polynomials

لكي تحلِّل حدودية، حاول أن تكتبها كناتج ضرب عاملين أو أكثر.

**مثــــــال 2** حلّل كل حدودية.

أ $x^3-5x^2-6x$

ب $x^3+4x^2+2x+8$

**الحـل**

أ $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)$ ضع خارجًا العامل المشترك $x$.

$=x(x-6)(x+1)$ حلِّل المقدار التربيعي.

ب يمكنك تحليل الحدودية $x^3+4x^2+2x+8$ بتجميع الحدّين الأوّلين معًا والحدّين الآخرين معًا.

$x^3+4x^2+2x+8=(x^3+4x^2)+(2x+8)$ جمّع الحدود.

$=x^2(x+4)+2(x+4)$ حلِّل كل مجموعة.

$=(x^2+2)(x+4)$ ضع $(x+4)$ خارجًا.

**حــاولْ** حلِّل كل حدودية.

أ $x^3-9x$

ب $x^3-x^2+2x-2$

تؤدّي المتطابقات المميّزة دورًا مهمًّا في تحليل الحدوديات.

### المتطابقات المميّزة Special Identities

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$    $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

**مثــــــال 3** حلِّل كل حدودية.

أ $x^2-10x+25$

ب $49y^2+14y+1$

ج $4y^2-25$

د $x^3+27$

هـ $x^3-8$

**الحــل**

أ $x^2-10x+25=(x)^2+2\times5\times x+(5)^2=(x+5)^2$

ب $49y^2+14y+1=(7y)^2+2\times1\times(7y)+(1)^2=(7y+1)^2$

ج $4y^2-25=(2y)^2-(5)^2=(2y+5)(2y-5)$

د $x^3+27=(x)^3+(3)^3+(x+3)(x^2-3x+9)$

هـ $x^3-8=(x)^3-(2)^2=(x-2)(x^2+2x+4)$

**حــاولْ** حلِّل الحدوديتين $x^3+1000$ وَ $x^3-125$ .

تذكّر أن العدد $a$ يشكّل **صفرًا zero** للدالّة $f(x)$ إذا كان $f(x)=0$. فالعدد $-2$ هو صفر من أصفار الدالّة $f(x)=x^3+8$ ، لأن $f(-2)=(-2)^3+8=-8+8=0$ .

تأمّل الدالّة $f(x)=(x-2)(3x^2+5x-4)$، تلاحظ بسرعة أن العدد 2 صفر من أصفار الدالّة $(f(2)=0)$ . تأمل الآن واقعًا معاكسًا للواقع السابق. إذا علمت أن عددًا، $\frac{1}{4}$ مثلاً، صفر من أصفار دالّة حدودية، فهل يكون المقدار $\left(x-\frac{1}{4}\right)$ عاملاً من عواملها؟ يكمن الجواب عن ذلك في النظرية التالية:

**مبرهنة العامل Factor Theorie**

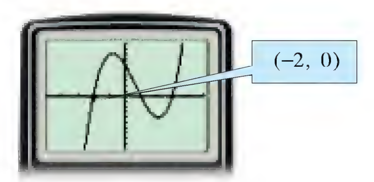
إذا كان العدد $a$ صفرًا من أصفار دالّة حدوديّة $f(x)$ ، فإن المقدار $(x-a)$ عاملٌ من عواملها، والعكس صحيح.

يمكنك استعمال هذه النظرية لتحليل الحدوديات.

**مثــــال** 4 **هل المقدار $x+2$ عامل من عوامل الدالّة الحدودية $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ ؟**



**الحــل**




يبيّن الرسم البياني أن $-2$ هو صفر من أصفار الدالّة.

اكتب $x+2$ على الصورة $x-a$ .

$x+2=x-(-2)$ . إذًا $a=-2$ .

احسب $f(-2)$ .

$$f(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+6$$
$$=-8-2\times4+10+6$$
$$=-8-8+10+6=0$$

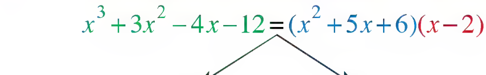
إذًا، $(x+2)$ هو عامل من عوامل الدالّة الحدودية $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ .

**حــاولْ** هل المقدار $(x+3)$ عامل من عوامل الحدودية $x^3-3x^2-6x+8$ ؟

## Dividing Polynomials قسمة الحدوديّات

يمكنك أن تكتب كل جملة ضرب على صورة جملة قسمة بطريقتين.

$$x^3+3x^2-4x-12=(x^2+5x+6)(x-2)$$



$$\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x-2}=x^2+5x+6 \qquad \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+5x+6}=x-2$$

يمكنك قسمة حدودية على $x-a$ باستعمال

**القسمة الإقليدية** (الطويلة) **Long Division**

أو باستعمال **القسمة الآلية**

**Synthetic Division** .

تشبه القسمة الإقليدية للحدوديات القسمة الإقليدية للأعداد. تفحَّص قسمة $x^3+3x^2-4x-12$ على $x-2$ .

**القسمة الإقليديّة**

ناتج القسمة: $x^2+5x+6$

المقسوم عليه: $x-2$ ، المقسوم: $x^3+3x^2-4x-12$

$$\begin{array}{r} -(x^3-2x^2) \\ \hline 5x^2-4x \\ -(5x^2-10x) \\ \hline 6x-12 \\ -(6x-12) \\ \hline 0 \end{array}$$

الباقي: $0$

**الخطوة 1** اكتب الحدودية على الصورة العامّة.

**الخطوة 2** اقسم الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه $x^3 \div x=x^2$ .

**الخطوة 3** اكتب $x^2$ في ناتج القسمة واضربه في المقسوم عليه $x^2(x-2)=x^3-2x^2$ .

**الخطوة 4** اطرح ناتج الضرب $x^3-2x^2$ من المقسوم.

**الخطوة 5** كرِّر الخطوات الأولى والثانية والثالثة على ناتج الطرح كمقسوم.

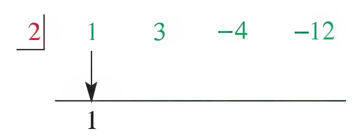
**القسمة الآلية**

تسهّل القسمة الآلية الأمور لأنها لا تتطلّب كتابة المتغيِّر.

**الخطوة 1** اكتب العدد $a$ (هنا 2) إلى اليسار ومعاملات الحدودية إلى اليمين. أنزل المعامل الأول (هنا 1) تحت الخط وضعْه تحت المعامل الأول، كما هو مبيّن.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

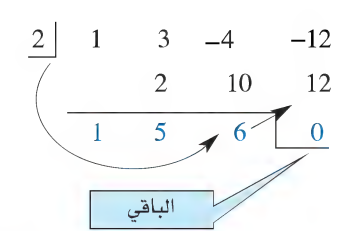
**الخطوة 2** اضرب 2 في 1، ثم اكتب الناتج تحت المعامل الثاني.



$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

**الخطوة 3** اكتب مجموع 2 وَ 3 تحت الخط. اضرب 2 في العدد الذي كتبته تحت الخط واكتب الناتج تحت المعامل التالي.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & & 2 & 10 & \\ \hline & 1 & 5 & & \end{array}$$




**الخطوة 4** اكتب مجموع 4– وَ 10 تحت الخط.
اضرب 2 في 6، ثم اكتب الناتج تحت العامل التالي.

باقي عملية القسمة هذه هو الصفر. الأعداد النهائية التي حصلت عليها، أي 1 وَ 5 وَ 6، هي معاملات ناتج القسمة. إذًا، ناتج القسمة هو $x^2+5x+6$.

تُستعمل القسمة الآلية حين يكون المقسوم عليه حدودية خطّية على شكل $x-a$. أما إذا كان المقسوم عليه ذا درجة أكبر من 1، فلا بد من استعمال القسمة الإقليدية.

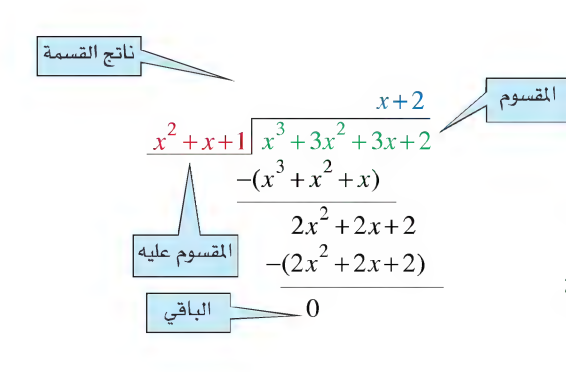
**مثال** **5** اقسم $x^3+3x^2+3x+2$ على $x^2+x+1$.

**الحل**

**القسمة الإقليدية (الطويلة)**

**الخطوة 1** $x^3 \div x^2 = x$.
اكتب $x$ في ناتج القسمة.

**الخطوة 2** اضرب $x$ في المقسوم عليه ثم اطرح الناتج من المقسوم.
كرِّر الخطوات حتى تحصل على حدودية درجتها أصغر من درجة المقسوم عليه.




**حاول** اقسمْ $x^3+3x^2-13x-15$ على $x^2-2x-3$.

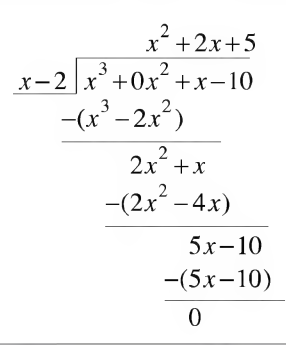
**مثال** **6** حلّل الحدودية $x^3+x-10$ باستعمال القسمة، علمًا بأن 2 هو صفر من أصفارها.

**الحل**

**طريقة أولى:** استعمل القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r} x^2+2x+5 \\ x-2\,\overline{)\,x^3+0x^2+x-10} \\ -(x^3-2x^2) \\ \hline 2x^2+x \\ -(2x^2-4x) \\ \hline 5x-10 \\ -(5x-10) \\ \hline 0 \end{array}$$

**طريقة ثانية** استعمل القسمة الآلية




$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 1 & -10 \\ & & 2 & 4 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

$x^2+2x+5$

**حاول** حلِّل الحدودية $x^3-13x-12$ باستعمال القسمة، علمًا بأن 3– هو صفر من أصفارها.

**تفكير ناقد** أوضح لماذا تجمع نواتج الضرب في القسمة الآلية بدلاً من طرحها كما في القسمة الإقليدية.

تُفيد نظرية الباقي أن قيمة حدودية $P(x)$ ، عند التعويض عن $x$ بالعدد $a$، ما هي إلا قيمة الباقي في قسمة الحدودية على $(x-a)$ . فإذا كان $P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$ فإن $p(-3)$ يساوي باقي قسمة $P(x)$ على $x-(-3)=x+3$ .

**القسمة الآلية.**

| $-3$ | 2 | 7 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| | | $-6$ | $-3$ | 3 |
| | 2 | 1 | $-1$ | 4 |

الباقي هو 4

**التعويض**

$$P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$$

$$P(-3)=2(-3)^3+7(-3)^2+2(-3)+1=4$$

**مبرهنة الباقي Remainder Theorem**

باقي قسمة حدودية $P(x)$ على $(x-a)$ هو العدد $P(a)$ (قيمة $P$ عند التعويض عن $x$ بالعدد $a$).

**مثـــــال 7**



احسب $P(5)$ حيث $P(5)=2x^3+7x^2+2x+1$ .

**الحـل**

**طريقة أولى** استعمل القسمة الآلية

| 5 | 2 | 7 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| | | 10 | 85 | 435 |
| | 2 | 17 | 87 | 436 |

إذًا، $P(5)=436$ .

**طريقة ثانية** استعمل التعويض

$$P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$$

$$P(5)=2(5)^3+7(5)^2+2(5)+1$$

$$=250+175+10+1$$

$$=436$$

**حـــاولْ** احسب $P(3)$ حيث $P(x)=3x^3+2x^2-3x+4$.

# التمــــــاريــــن

## التواصل في الرياضيات

1 أوضح كيف تستعمل المتطابقات المميّزة لتحليل الحدودية $x^3-4x$ .

2 أوضح كيف تستعمل نظرية العامل لتعرف إن كان $(x+1)$ يشكّل عاملاً للحدودية $x^3-2x^2-8x-5$ أو لا.

3 أوضح كيف تستعمل نظرية الباقي لحساب $P(5)$ ، حيث $P(x)$ حدودية.

## تمارين موجّهة

4 اكتب الحدودية $P(x)=x(10-x)(2+x)$ على الصورة العامّة.

**حلّل كل حدودية.**

5 $x^3-5x^2+6x$ 6 $x^3+5x^2+3x+15$ 7 $x^3-216$

8 استعمل التعويض لتعرف إن كان $(x+2)$ يشكّل عاملاً للحدودية $x^3+4x^2+5x+2$ أو لا.

9 احسب $(x^3+4x^2+4x+3)\div(x^2+x+1)$ .

**3– هو صفر من أصفار الدالّة $f(x)=x^3-14x-15$ . حلّل الدالّة باستعمال:**

10 القسمة الآلية. 11 القسمة الإقليدية.

**$f(x)=2x^3+3x^2+4x+1$ ، جِد $f(2)$ باستعمال:**

12 القسمة الآلية. 13 القسمة الإقليدية.

## تمارين وتطبيقات

**اكتب كل حدودية على الصورة العامّة.**

14 $3x^2(4x^3-2x^2+5x+2)$ 15 $(2x-3)(x+4)$

16 $(2x+3)(x^3-5x^2+4)$ 17 $(x-5)(-3x^3-4x-1)$

18 $(x-3)(2-x)(x-1)$ 19 $(2x-4)(x+1)^2$

20 $(2x+1)^3$ 21 $(-3x^2-x+2)(x+1)^2$

22 $\left(x-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{3}{7}\right)$ 23 $\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$

**حلّل كل حدودية.**

24 $x^3+8x^2+15x$ 25 $x^3+2x^2-3x$

26 $3x^3-300x$ 27 $18x^3-60x^2+50x$

28 $x^3+3x^2-x-3$

29 $x^3-2x^2-5x+10$

30 $x^3+x^2+x+1$

31 $1-x+x^2-x^3$

32 $x^3+9x^2+14x$

33 $x^3+x^2+2+2x$

34 $x^3-64$

35 $27x^3-125$

36 $x^6-1$

37 $27+8x^6$

**استعمل التعويض لتحديد إن كان المقدار الخطّي يشكّل عاملاً للحدودية أو لا.**

38 $x^2+x+1$ ؛ $x-1$

39 $x^3+5x^2-18x-48$ ؛ $x+6$

40 $x^3+3x^2-18x-40$ ؛ $x-4$

41 $x^3-8x^2+9x+18$ ؛ $x-6$

42 $x^3+6x^2-x-30$ ؛ $x-2$

43 $x^3-x^2-17x-15$ ؛ $x+3$

**استعمل القسمة الإقليدية لقسمة الحدوديّة الأولى على الثانية.**

44 $(x^2+4x+4)\div(x+2)$

45 $(x^2-3x+2)\div(x-1)$

46 $(x^3-7x-6)\div(x+1)$

47 $(x^3+11x^2+39x+45)\div(x+5)$

48 $(3x^2-x+x^3-3)\div(x^2+4x+3)$

49 $(x^3+6x^2-x-30)\div(x^2+8x+15)$

50 $(x^3-5x^2-13x+42)\div(x^2+x-7)$

51 $(10x-5x^2+x^3-24)\div(x^2-x+6)$

52 $\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

53 $\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}\right)\div\left(x+\frac{3}{4}\right)$

**استعمل القسمة الآلية لقسمة الحدوديّة الأولى على الثانية.**

54 $(x^2-4x-12)\div(x-4)$

55 $(x^2-3x+2)\div(x-1)$

56 $(x^3+x^2-9x-9)\div(x+1)$

57 $(x^3-2x^2-22x+40)\div(x-4)$

58 $(x^2+5x^3-18)\div(x+3)$

59 $(x^3-27)\div(x-3)$

60 $(x^3+3)\div(x-1)$

61 $(x^2-6)\div(x+4)$

**استعمل القسمة الآلية والتعويض لحساب القيمة المطلوبة.**

62 $f(x)=x^2+1$ ؛ $f(1)$

63 $f(x)=x^2+1$ ؛ $f(2)$

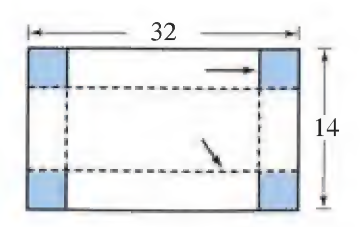
64 $f(x)=4x^2-2x+3$ ؛ $f(3)$

65 $f(x)=3x^3+2x^2+3x+1$ ؛ $f(-2)$

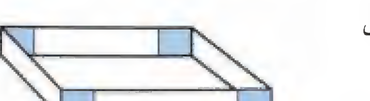
**حدّد قيمة $k$ التي تجعل من المقدار الخطّي المعطى عاملاً من عوامل الحدودية.**

66 $x^3+3x^2-x+k$ ؛ $x-2$

67 $kx^3-2x^2+x-6$ ؛ $x+3$

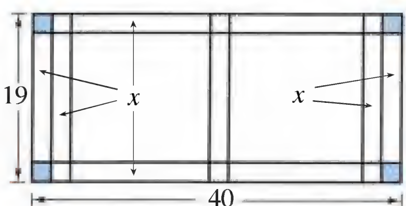



**صناعة تم صنع علبة مفتوحة من أعلى باستعمال قطعة مستطيلة من الورق المقوّى طولها 32cm وعرضها 14cm، كما هو مبيّن في المقابل. إذا كان ارتفاع العلبة $x$ فإن حجمها هو $V(x)=x(14-2x)(32-2x)$ .**



68 اكتب، على الصورة العامّة، الدالّة الحدودية التي تمثّل حجم العلبة.

69 ما حجم العلبة إذا كان ارتفاعها 2cm؟






صناعة تم صنع علبة بيتزا باستعمال قطعة مستطيلة من الورق المقوّى طولها 40cm وعرضها 19cm كما هو مبيّن أعلاه. إذا كان ارتفاع العلبة $x$ فإن حجمها هو $V(x)=\frac{1}{2}x(19-2x)(40-5x)$ .

70 اكتب، على الصورة العامّة، الدالّة الحدودية التي تمثّل حجم العلبة.

71 ما حجم العلبة إذا كان ارتفاعها 2 cm؟

72 ما حجم العلبة إذا كان ارتفاعها 2.5 cm؟

## نظرة إلى الوراء



73 حُلَّ المتباينة $x+3\le 3(x-1)$ ، ثم مثِّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد.

**حلِّل كل مقدار.**

74 $5b^2-5c^2$

75 $2x^2-32y^2$

76 $x^2+x-12$

77 $5-6x+x^2$

78 $4x^2+4x+1$

79 $2x^2+11x+15$

**اجمع أو اطرح.**

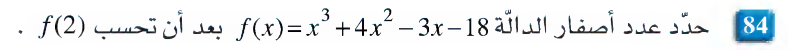
80 $(2x^2-7x+5)+(x^3+6x^2-4x+1)$

81 $(x^4-5x^2-x)-(x^4+4x^3-x+6)$

82 $\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}x^3+1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)$

83 $(-3.2x^2+2.7x^3+7.8x)-(4.9x^3+2.5x^4)$

## نظرة إلى الأمام



84 حدّد عدد أصفار الدالّة $f(x)=x^3+4x^2-3x-18$ بعد أن تحسب $f(2)$ .




# المعادلات والمتباينات الحدودية

## Polynomial Eqauations and Inequalities

**لماذا**

يمكنك حلّ مسائل من الحياة باستعمال المعادلات الحدوديّة. يمكنك مثلاً أن تحدّد نصف القطر في قاعدة أهراء القمح للحصول على أهراء من حجم معين.



**الأهداف**

- يحلّ معادلة حدودية بالتحليل.
- يقدّر بيانيًّا جذور معادلة حدوديّة.
- يحلّ بيانيًّا متباينة حدودية.

**تطبيقات**

**زراعة**

يقوم مزارعو القمح بتخزينه في أوعية كبيرة تعرف **بالأهراءات**. يتكوّن الأهراء من أسطوانة فوقها نصف كرة، كما هو مبيّن في الصورة أعلاه. تعلّمت في دروس الهندسة أن حجم الأسطوانة يُحسب بالقانون التالي $C(r)=\pi r^2 h$ حيث يرمز $r$ إلى نصف قطر القاعدة ويرمز $h$ إلى ارتفاع الأسطوانة. كما أن حجم الكرة يُحسب بالقانون $H(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ . ينتج ممّا سبق أن حجم الأهراء يساوي $T(r)=H(r)+C(2)=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$ يرغب محمد في بناء أهراء ارتفاعه 8 أمتار وسعته 650 مترًا مكعّبًا من القمح. ما نصف القطر الذي ينبغي أن يختاره لقاعدة الأهراء؟

**مثـــال**

**1** حلّ المعادلة $2x^3-7x^2+3x=0$ باستعمال التحليل.

**الحـل**

$2x^3-7x^2+3x=0$

$x(2x^2-7x+3)=0$ حلّل بإخراج العامل المشترك الأكبر

$x(2x-1)(x-3)=0$ حلّل المقدار التربيعي

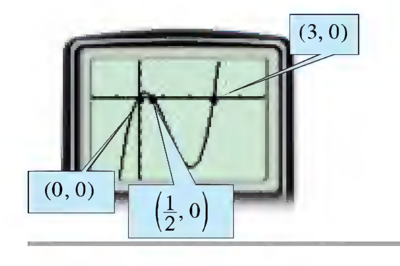
$x=0$ أو $2x-1=0$ أو $x-3=0$ استعمل خاصية الضرب الصفري

$x=0$ أو $x=\frac{1}{2}$ أو $x=3$

**تحقّق**

ارسم بيان الدالّة $y=2x^3-7x^2+3x$ وتفحّص أصفارها.

إذا تفحّصت البيان تتأكّد من أن أصفار الدالّة هي التي حصلت عليها جبريًّا.




**حـــاولْ** حُلَّ المعادلة $2x^3+x^2-6x=0$ باستعمال التحليل.



أظهر تحليل المقدار الحدودي، بغية حل المعادلة السابقة، أن المقدار يتحلّل إلى ناتج ضرب 3 عوامل خطّية، وأن للمعادلة 3 حلول أو **جذور Roots** يختلف واحدها عن الآخر. غير أن لبعض المعادلات الحدوديّة جذورًا تتكرَّر، كما يبيّن المثال التالي:

## مثال 2

**حُلّ المعادلة $x^3-7x^2+15x-9=0$ باستعمال الرسم البياني والقسمة الآلية والتحليل.**

**الحل**

استعمل بيان الدالّة $y=x^3-7x^2+15x-9$ لتقدير جذور المعادلة.

يُظهر البيان أن 1 هو أحد أصفار الدالّة. تستطيع أن تتحقّق من ذلك بالتعويض عن $x$ بهذا العدد. استعمل نظرية العامل والقسمة الآلية لقسمة $x^3-7x^2+15x-9$ على $x-1$.

| 1 | 1 | −7 | 15 | −9 |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | −6 | 9 |
| | 1 | −6 | 9 | 0 |

الباقي صفر

ناتج القسمة هو $x^2-6x+9$

إذًا

$$x^3-7x^2+15x-9=(x-1)(x^2-6x+9)$$
$$=(x-1)(x-3)^2$$

$x-1=0$ أو $x-3=0$ أو $x-3=0$

$x=1$ أو $x=3$ أو $x=3$

جذور المعادلة $x^3-7x^2+15x-9=0$ هي إذًا 1 و3. والجذر 3 مكرّر مرّتين.

**حـاول** حل المعادلة $x^3+2x^2-4x-8=0$ باستعمال الرسم البياني والقسمة الآلية والتحليل.

قد يتكرّر العامل $(x-a)$ عند تحليل حدوديّة P، كما وجدنا في المثال السابق. تقول في هذه الحالة أن $a$ هو **جذر متكرّر Multiple Root** للمعادلة $P(x)=0$. عدد المرات التي يتكرّر فيها وجود $(x-a)$ يُدعى **رتبة تكرار Multiplicity** الجذر $a$. فالجذر 3 في معادلة المثال السابق هو جذر متكرر من الرتبة الثانية.

عندما يكون الجذر $a$ للحدوديّة متكرّرًا، فإن بيان الدالّة يلامس المحور الأول عند النقطة $(a, 0)$ دون أن يقطعه، كما يبيّن ذلك المثال السابق. غير أن الاعتماد على رؤية البيان يلامس المحور الأول لا يكفي للقول إن نقطة الملامسة تحدِّد جذرًا متكرِّرًا للمعادلة، لأن البيان ليس دقيقًا بما يكفي لهذا الاستنتاج.

يمكن تحليل بعض الحدوديات بوضع متغيّر آخر محل المتغيّر الأصلي. يوضّح ذلك المثال التالي:

## مثال 3

**حُلّ المعادلة التالية بالتحليل $x^4-4x^2+3=0$ .**

**الحل**

حل المسائل

**1. حلّ مسألة أبسط** يمكنك تحويل الحدودية $x^4-4x^2+3$ إلى حدوديّة من الدرجة الثانية باستعمال متغيّر آخر $y=x^2$ ، فتصبح الحدوديّة $y^2-4y+3$ .

$$x^4-4x^2+3=0$$
$$(x^2)^2-4(x^2)+3=0$$
$$y^2-4y+3=0$$
$$(y-1)(y-3)=0$$
$$y=1 \quad \text{أو} \quad y=3$$

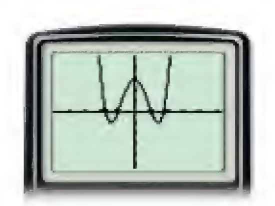
2. عوّض عن $y$ بقيمته الأساسية $x^2$ ثم حُلّ لتجد قيَم $x$ التي تشكّل جذورًا للمعادلة الأساسية.

$x^2 = 1$ أو $x^2 = 3$

$x = \pm 1$ أو $x = \pm\sqrt{3}$

جذور المعادلة الأساسية هي $x = -1$ وَ $x = 1$ وَ $x = -\sqrt{3}$ وَ $x = \sqrt{3}$.

**تحقّق**



ارسم بيان الدالّة $y = x^4 - 4x^2 + 3$ وتفحّص أصفارها. إنك ترى أن بيان الدالّة يقطع المحور الأول في $-1$ و $1$ وفي نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى المحور الثاني تمثّلان $-\sqrt{3} \approx -1.7$ و $\sqrt{3} \approx 1.7$.

**حاول** حُلّ المعادلة التالية بالتحليل: $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$.

## عدد جذور معادلة حدوديّة Number of Roots for Polynomial Equation

توحي الأمثلة السابقة بأن عدد جذور معادلة من الدرجة الثالثة هو 3، وعدد جذور معادلة من الدرجة الرابعة هو 4. غير أن ذلك ليس صحيحًا بشكل عام.

**مثال 4** حُلّ المعادلة: $x^4 - 1 = 0$.

**الحل**

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$ فرق مربّعين

$$= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$

لا يمكنك تحليل العامل $x^2 + 1$ إذ ليس من صفر لهذه الحدودية بين الأعداد الحقيقية؛ ذلك أن $x^2$ لا يمكن أن يكون سالبًا. عدد جذور المعادلة $x^4 - 1 = 0$ يقتصر إذًا على اثنين.

## المتباينات الحدودية Polynomial Inequalities

**مثال 5** حُلّ المتباينة التالية: $x^4 - 4x^2 < 0$.

**الحل**



ارسم بيان الدالّة $y = x^4 - 4x^2$.

يُظهر بيان الدالّة أن أصفارها هي $-2$ وَ $0$ وَ $2$ وأن قيمتها تكون سالبة عندما يتّخذ $x$ قيَمًا بين $-2$ و $2$ باستثناء $0$ أي $-2 < x < 2$ مع $x \neq 0$.

**حاول** حُلّ المتباينة $x^4 - 4x^2 \leq 0$.

# التمــــــاريــــــن

## التواصل في الرياضيات

1. أوضح العلاقات التي تربط بين صفر الدالّة وجذر المعادلة وعامل الحدودية ونقطة التقاطع مع المحور الأول.

2. ماذا تقول عن أصفار دالّة حدودية من نوع $y=(x-3)^n$ ؟

## تمارين موجَّهة

**حُلّ المعادلة بالتحليل.**

3. $x^3-x^2-12x=0$

4. $x^3+15x^2+54x=0$

**استعمل الرسم البياني والقسمة الآلية والتحليل لتجد جميع جذور المعادلة.**

5. $x^3-5x^2+3x=0$

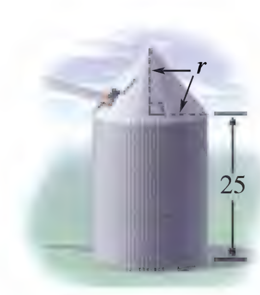
6. $x^3-3x-2=0$

**استعمل متغيّرًا جديدًا والتحليل لتجد جذور المعادلة.**

7. $x^4-8x^2+16=0$

8. $x^4-2x^2+1=0$

9. تمثّل الدالّة $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^3+25\pi r^2$ حجم أهراء القمح المبيَّن في الصورة المقابلة، حيث يمثّل $r$ نصف قطر الأسطوانة بالأمتار. احسب نصف قطر الأسطوانة مقرّبًا إلى أقرب عُشر إذا كان الحجم المطلوب للأهراء $2\ 042\text{m}^3$






## تمارين وتطبيقات

**استعمل التحليل لتجد جذور المعادلة.**

10. $x^3+2x^2-35x=0$

11. $x^3+2x^2-48x=0$

12. $x^3-13x^2+40x=0$

13. $x^3-7x^2+10x=0$

14. $x^3=25x$

15. $y^3=49y$

16. $2x^3-10x^2-100x=0$

17. $16x-6x^2-x^3=0$

18. $3y^3+9y^2-162y=0$

19. $20d^2+5d^3-60d=0$

20. $110x-2x^3=12x^2$

21. $3y^3+36y^2=3y^4$

**استعمل التحليل لتجد جذور المعادلة.**

22 $d^3 - d^2 - 5d - 3 = 0$

23 $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

24 $2b^3 + 16b^2 + 32b = 0$

25 $5d^3 - 60d^2 + 180d = 0$

26 $x^3 - 3x - 2 = 0$

27 $x^3 - 3x + 2 = 0$

28 $x^3 - 3x - 2 = 0$

29 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

30 $n^3 + 8 = 2n^2 + 4n$

31 $x^3 + 3x^2 = 27 + 9x$

**استعمل متغيِّرًا جديدًا والتحليل لتجد جذور المعادلة.**

32 $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

33 $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

34 $y^4 - 18y^2 + 81 = 0$

35 $b^4 - 24b^2 + 144 = 0$

36 $x^5 - 9x^3 + 8x = 0$

37 $b^5 - 28b^3 + 27b = 0$

38 $x^4 - 12x^2 = -36$

39 $x^4 - 14x^2 = -49$

40 $d^4 + 12 = 7d^2$

41 $n^4 + 14 = 9n^2$

42 **نافذة على الثقافة الإسلامية** يتذكّر الناس عمر الخيّام كشاعر كتب ديوان **الرباعيّات**. غير أن القليل منهم يعرف أن هذا الإنسان كان من أهم علماء المسلمين الذين اشتغلوا في الرياضيات. طوّر هذا العالم طريقة لتحديد أصفار الدوالّ الحدودية التي تُكتب على الشكل التالي: $f(x) = x^3 - bx - a$ حيث $a > 0$ وَ $b > 0$، عن طريق إيجاد الإحداثيات الأولى لنقاط تقاطع بعض بيانات الدوال المعروفة.

أ ما قيَم $a$ و $b$ في الدالّة $f(x) = x^3 - 7x - 6$.

ب ارسم بيانات الدوال $y = -\frac{1}{\sqrt{b}}x^2$ وَ $y = \sqrt{x^2 + \frac{a}{b}x}$ وَ $y = -\sqrt{x^2 + \frac{a}{b}x}$ مستعملاً القيَم التي وجدتها لكل من $a$ وَ $b$ في السؤال السابق.

ج حدِّد الإحداثيات الأولى المختلفة عن الصفر لنقاط تقاطع بيانات هذه الدوالّ. هذه الإحداثيات تشكِّل أصفار الدالّة $f(x)$.

د ارسم بيان الدالّة $f(x) = x^3 - 7x - 6$ وحدِّد أصفارها. تحقّق من أن ما ورد في السؤال السابق صحيح.



43 **صناعة** عرض صندوق الخشب $x$ وطوله 3 أضعاف عرضه، وارتفاعه يزيد 1 على عرضه. تحقّق من أن الدالّة $V(x) = 3x^3 + 3x^2$ تمثّل حجم الصندوق. حدِّد أبعاد الصندوق عندما يكون حجمه 36؟

44 **طب** لحبَّة الفيتامين شكل أسطوانة تنتهي بنصفَي كرة من الجهتين. تمثِّل الدالّة $V(r) = 10\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم حبة الفيتامين، حيث يمثّل $r$ نصف قطر الأسطوانة (بالمِلّيمتر). ما قيمة $r$ عندما يكون حجم حبة الفيتامين $160 \text{mm}^3$؟

## نظرة إلى الوراء

**حدِّد الإحداثي الأول لنقاط التحوّل للدالّة. اكتب قيمة تقريبيّة لكل قيمة قصوى. حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص.**

45 $y=6x^2-x-12$

46 $y=2x^2+5x+2$

47 $y=x^2+3x-2$

48 $y=x^3-3x^2+4x-5$

**اقسم باستعمال القسمة الآلية.**

49 $(3x^4-4x^2+2x-1)\div(x-1)$

50 $(x^4+4x^3+5x^2-5x-14)\div(x+2)$

## نظرة إلى الأمام

51 اكتب المقدار على أبسط صورة باستعمال التحليل $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x}\times\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ .

مشروع الفصل




# ما هو النموذج؟

سوف تقوم، من خلال اشتغالك على المشروع، بإيجاد دوال حدودية تكون نماذج لأشكال أوعية مختلفة. سوف تقوم بتجارب تتضمّن إضافة كمّيات ثابتة الحجم من الماء حتى يمتلئ الوعاء، ثم قياس ارتفاع الماء في الوعاء وحجمه، بعد كل إضافة، وتسجيل الكمّيتين. سوف يتكوّن لديك مجموعة من الأزواج المرتّبة تقوم بتمثيلها في المستوي الإحداثي.





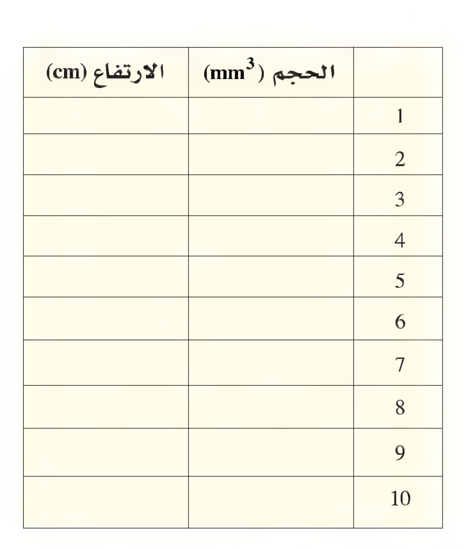
**الأدوات**

- وعاء شفّاف متوسط الحجم قاعدته مسطّحة.
- كوب يُستعمل في قياس كمّية السوائل مدرّج بالمليّمتر.
- مسطرة سنتيمترية.
- ماء.

كذلك تحتاج إلى حاسبة بيانيّة تسمح بإيجاد دالّة حدودية تشكّل نموذجًا لمجموعة من الأزواج المرتّبة.

## النشـاط 1

1. قم أولاً بتحديد الحجم الكلّي للوعاء. اقسم هذا الحجم على 10 وقرّب ناتج القسمة إلى أقرب عدد صحيح (مثلاً: إذا كان حجم الوعاء يساوي $347mm^3$ ، فإن القسمة على 10 تعطيك العدد 34.7 الذي تقرّبه إلى 35).
2. أضف الماء إلى الوعاء في 10 إضافات، حجم كل منها الجواب الذي حصلت عليه في السؤال السابق (مثلاً: $35mm^3$ في المثال السابق). سجّل حجم الماء وارتفاعه في الوعاء بعد كل إضافة. دوِّن، في جدول شبيه بالجدول المقابل، تغيُّر حجم الماء وارتفاعه في الوعاء. كرِّر العملية حتى يمتلئ الوعاء.



| | الحجم ($mm^3$) | الارتفاع (cm) |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |

## النشـاط 2

1. استعمل المعطيات المسجّلة في جدول النشاط السابق. مثِّل بيانيًّا الأزواج المرتَّبة معتبرًا المتغيِّر $x$ يمثّل الحجم والمتغيِّر $y$ يمثِّل الارتفاع.
2. استعمل وظيفة الجدولة في الحاسبة البيانيّة لإدخال معطيات الجدول الذي حصلت عليه. اطلب إلى الحاسبة إيجاد نموذجين لتمثيل مجموعة الأزواج المرتَّبة التي حصلت عليها: نموذج دالّة حدودية من الدرجة الثالثة، وآخر عبارة عن دالّة تربيعيّة.
3. للمقارنة بين النموذجين، أنشئ خطّيهما البيانيين في المستوي الإحداثي الذي مثّلت فيه الأزواج المرتّبة. اختر النموذج الذي يبدو لك أصدق من الآخر، أي أقرب إلى النقاط التي تمثِّل الأزواج المرتَّبة.
4. هل يمكنك استعمال هذا النموذج لتخمين ارتفاع الماء في الوعاء العائد إلى كمّية ماء مختلفة عن الكمّيات الواردة في الجدول؟ أوضح ذلك.





# مراجعة

احسب قيمة الحدودية عندما $x=2$ ، وعندما $x=-1$.

1. $-x^3+4x^2-2$
2. $x^3+2x^2-1$
3. $x^4-22$
4. $19-x^3-x^2$

اجمع أو اطرح ثم اكتب الناتج على أبسط صورة.

5. $(3x^3-5x^2+8x+1)+(11x^3-x^2+2x-3)$
6. $(7x^3-8x^2+2x-3)-(x^3+x^2-6)$

ارسم بيان الدالّة. اذكر إن كان للدالّة قيَم كبرى أو قيَم صغرى، واكتب قيمة تقريبيّة لها. حدّد فترات تزايد الدالّة، وفترات تناقصها.

7. $f(x)=x^2-2x+9$
8. $f(x)=-x^2+5x-4$
9. $f(x)=2x^3+5x^2-1$
10. $f(x)=-2x^3+x^2-9$

اضرب ثم اكتب على أبسط صورة.

11. $2x^3(5x^4-3x+x^2-6-x^3)$
12. $(x+4)(x^3-7)(x+1)$

حلّل الحدوديّة.

13. $x^3+4x^2-5x$
14. $x^3-3x^2-10x$
15. $x^3-125$
16. $27x^3+1$

استعمل التعويض لتقرّر إن كانت الحدوديّة الثانية تقسم الأولى أو لا.

17. $(x^3-7x^2+4x+12)$ ؛ $(x-2)$
18. $(x^3-5x^2-11x+12)$ ؛ $(x+2)$

اقسم.

19. $(x^3+6x^2-x-30)\div(x-2)$
20. $(x^3-2x^2-11x+12)\div(x^2-x-12)$

حُلَّ المعادلة محدّدًا الجذور كافّة.

21. $x^4-8x^2+16=0$
22. $x^4-10x^2+24=0$
23. $x^4-10x^2+9=0$
24. $x^4-13x^2+12=0$

حُلَّ المعادلة بمعرفة أن العدد المعطى هو أحد جذورها.

25. $x^3+7x^2+16x+12=0$ ؛ $-3$
26. $x^3+3x^2-16x-48=0$ ؛ $-3$
27. $x^3-11x^2+38x-40=0$ ؛ $4$
28. $x^3-6x^2-x+6=0$ ؛ $6$
29. حُلّ المعادلة $x^3-x^2-6x+6=0$

اذكر درجة الحدودية.

30. $3x^3+11x^2-2x+1$
31. $8x^5-6x^2+10x^3$
32. $-x^2+8x-5x^4-3$
33. $-2x^2-x^3+7x^4$



# اختبار الفصل

**احسب قيمة كل حدودية عندما يتَّخذ المتغيِّر القيمة 3 ثم القيمة −2.**

1 $x^3-2x^2+5$

2 $x^4-x^2+3x-4$

3 $5x^2-3x+1$

4 $7x^3+x^2-2$

**اجمع أو اطرح، واكتب الناتج كحدودية على الصورة العامة، ثم صنِّف الحدودية الناتجة وفقًا لدرجتها وعدد حدودها.**

5 $(5x^3-3x^2+x-7)+(3x^2-x-6)$

6 $(2x^5+9x^3-7x+4)-(9x^3+3x^2+4)$

7 **تمويل** قامت حكومة أحد البلدان بإنشاء صندوق خاص لتشجع العاملين في دوائرها على تكوين مبلغ من المال يعينهم أيام الشيخوخة. يودع كل عامل حسابه الخاص في الصندوق مبلغًا يعادل 500 ألف دينار بداية كل عام. وتدفع الحكومة عنه، بعد مرور عام، ما يساوي 7% من مجموع ما يحتويه حساب العامل. كم سيكون مجموع ما يحتويه حساب العامل عشية قيامه بدفع القسط الخامس؟

**استعمل حاسبة بيانية لرسم بيان كل دالّة. حدِّد القيَم الكبرى والقيَم الصغرى مقرَّبة إلى أقرب عُشر، وحدِّد فترات تزايد الدالّة وفترات تناقصها.**

8 $f(x)=2-2x-x^2$

9 $f(x)=x^3+3x^2+4$

10 $f(x)=x^4-3x^2-4$

11 $f(x)=5-3x^2-x^3$

**حلِّل كل حدوديّة.**

12 $5x^4-180x^2$

13 $4x^3-5x^2-8x+10$

14 $2x^3+128$

15 $x^4-7x^3+12x^2$

**اقسم باستعمال القسمة الإقليدية.**

16 $(2x^4-7x^3-15x^2+8x+12)$ على $(2x+3)$

17 $(x^3+3x^2-2x-6)$ على $(x^2-2)$

**اقسم مستعملاً القسمة الآلية.**

18 $(-x^3+6x^2-11x+6)$ على $(x-3)$

19 $(x^3+6x^2-27)$ على $(x+3)$

20 **صناعة** تمثِّل الدالة $V(x)=x(14-2x)(32-2x)$ حجم صندوق متوازي مستطيلات. اكتب حجم هذا الصندوق كحدودية على الصورة العامّة، ثم احسب حجمه عندما يتَّخذ $x$ القيمة 3.

**جد جذور كل معادلة.**

21 $-2x^3+7x^2+3x=0$

22 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

23 $x^4-6x^2+8=0$

25 **طاقة** يتكوّن مستوعب للغاز السائل من أسطوانة تنتهي عند كل طرف من طرفيها بنصف كرة. تُمثّل الدالة $V(r)=15\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$ حجم المستوعب بالأمتار المكعّبة، حيث يمثّل $r$ نصف قطر قاعدة الأسطوانة بالأمتار. أعط قيمة تقريبية لحجم هذا المستوعب عندما يكون نصف قطر قاعدته 0.5m.

**اكتب دالّة حدودية تحقِّق الشروط المحدَّدة.**

26 الدرجة = 2؛ $f(0)=3$، الأصفار: 1 وَ $\frac{3}{7}$.

27 الدرجة = 3، $f(0)=-18$؛ الأصفار: −3 وَ 3 وَ −1.

28 الدرجة = 3، $f(0)=30$؛ الأصفار: −3 وَ −1 وَ 2.




# اختبار تراكمي

**1** أي زوج مرّتب يشكّل حلاً للمتباينة المركّبة $y \geq 3x+2 \wedge y \geq -x$؟

أ $(1, -5)$ ب $(0, 5)$

ج أ وَ ب معًا د لا أ ولا ب

**2** ما ميل المستقيم $3x+4y=2$؟

أ $3$ ب $\frac{3}{2}$

ج $-\frac{3}{4}$ د $4$

**3** ما معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(1,-3)$ والمتعامد مع المستقيم $y=2x-2$؟

أ $2y=-x+5$ ب $2y=-x-5$

ج $y=-\frac{1}{2}x+6$ د $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

**4** أيّ ممّا يلي يشكّل تحليلاً للمقدار $x^2-5x+6$؟

أ $(x-2)(x-3)$ ب $(x+2)(x-3)$

ج $(x+1)(x+6)$ د $(x-1)(x-6)$

**5** أيّ دالّة يدلّ رأسها على قيمة كبرى؟

أ $y=3x^2+5x$

ب $y=7x+5x-3x^2$

ج $y=3+5x+\frac{1}{3}x^2$

د $y=\frac{1}{3}x^2$

**6** ما عدد حلول نظام معادلات محدّد؟

أ $0$ ب $1$

ج 1 على الأقل د عدد غير محدود

**7** احسب $|-2.5|-|3.2|$؟

**8** ما تقاطع المستقيم $x-5y=15$ مع المحور الثاني؟

أ $15$ ب $-1$

ج $3$ د $-3$

**9** ما مجموعة الحلّ للمتباينة $4x+2<2x+1$؟

أ $x \geq 1$ ب $x>2$

ج $x<\frac{1}{3}$ د $x<-\frac{1}{2}$

**10** أيّ مما يلي يشكّل مجموعة الحلّ للمتباينة $|x| \leq 5$؟

أ $-5 \leq x \leq 5$ ب $2 \leq x \leq -2$

ج $5 \leq x \leq -5$ د $-3 \leq x \leq 3$

**11** ما حلّ النظام الخطّي $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

أ $(2, 3)$ ب $(2, 1)$

ج $(-3, 2)$ د $(0, 1)$

**12** اكتب الحدودية $(x+1)(x+2)(x-4)$ على الصورة العامّة.

**13** اكتب الدالّة التربيعية أدناه على الصورة الرأسية:
$f(x)=2x^2-8x+9$

**14** اجمع $(2x^3+3x^2+1)+(5x^2-2x+2)$

**15** اطرح $(5x^3+4x^2-x)-(x^2+2x-1)$

**حلّل المقدار التربيعي إذا كان ذلك ممكنًا.**

**16** $-3y^2-5y$

**17** $x^2-5x-36$

**18** $24x^2+5x-36$

**19** $36x^2-46x-12$

**20** حُلّ المعادلة $\frac{x+2}{2}=\frac{2x}{3}$

## الفصل الخامس

# المقادير والدوالّ النسبيّة

1. التغيّر العكسي ودالّة المقلوب
2. الدوالّ النسبيَّة
3. ضرب المقادير النسبيَّة وقسمتها
4. جمع المقادير النسبيَّة وطرحها
5. المعادلات والمتباينات النسبيَّة
6. دالّة الجذر التربيعي

مشروع الفصل

مراجعة

اختبار الفصل

اختبار تراكمي




# المقادير والدوالّ النسبية

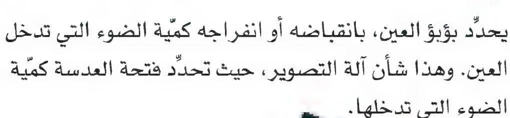
## Rational Expressions and Functions

سوف تدرس في هذا الفصل المقادير والدوالّ النسبية. وكذلك دالّة الجذر التربيعي. المقادير النسبية هي المقادير التي تكتب على صورة نسبة حدوديتَين. أما الدوالّ النسبية فهي الدوالّ التي يتم تعريفها بواسطة المقادير النسبية. تُستعمل الدوالّ النسبية ودالّة الجذر التربيعي في ميادين مُتعدِّدة، كالفيزياء والكيمياء والهندسة والتجارة والاقتصاد.

### الدروس





يحدِّد بؤبؤ العين، بانقباضه أو انفراجه كميّة الضوء التي تدخل العين. وهذا شأن آلة التصوير، حيث تحدِّد فتحة العدسة كميّة الضوء التي تدخلها.





## حول مشروع الفصل

يستطيع الكثيرون أن يحسبوا متوسِّط مجموعة من القيَم دون عقبات. فالمتوسِّطات تُستعمل في الكثير من الميادين، كتبدُّل أسعار العملات الأجنبية في المصارف، وتطوُّر أجور العمال، واستهلاك السيّارات للوقود، ومتوسِّطات السرعة. هناك أنواع مُتعدِّدة من المتوسِّطات التي يمكنك حسابها. سوف تحسب في مشروع الفصل نوعَيْن من المتوسِّطات: المتوسِّط الحسابي والمتوسّط التوافقي. سوف تستعمل المعطيات المقدَّمة لتحديد المتوسِّط الأنسب في كل حالة. بعد الانتهاء من هذا المشروع يصبح بإمكانك القيام بما يلي:

- حساب المتوسِّط الحسابي والمتوسِّط التوافقي لمجموعة من المعطيات.
- تحديد العلاقة بين المتوسِّط الحسابي والمتوسِّط التوافقي.
- تحديد المتوسِّط الأنسب الذي يجب حسابه لكل مجموعة من المعطيات.

الدرس 1

# التغيُّر العكسيّ ودالّة المقلوب

## Inverse Variation and Inverse Function



**الأهداف**

- يميِّز التغيُّر العكسيّ ويحدِّد ثابته.
- يكتب معادلة تغيُّر عكسيّ.
- يحلُّ مسائل من الواقع تتضمَّن تغيُّرًا عكسيًّا.

**لماذا**

من العلاقات التي تربط بين متغيّرين، علاقات تكون فيها نسبة المتغيِّر التابع إلى المتغير الحر ثابتة. كما أن هناك علاقات يكون فيها ناتج ضرب المتغيرين ثابتًا. تشكِّل العلاقات الأولى نوعًا من الدوال الخطية بينما تشكِّل العلاقات الأخرى نوعًا من الدوالّ النسبية، ومثالها العلاقة بين الزمن اللازم لإنهاء مشروع وعدد العاملين فيه.

غالبًا ما يقوم شباب متطوِّعون بزراعة الأشجار لتحريج مساحات جرداء. يلعب عدد المشاركين في زراعة الأشجار دورًا في تحديد الزمن اللازم لإنجاز المشروع. فكلّما زاد العدد قلّ الزمن اللازم. عندما تربط علاقة تغيُّر عكسي بين متغيِّرين فإن تزايد أحدهما يؤدّي إلى تناقص الآخر، وبالعكس. سوف تتعرَّف في النشاط التالي مثل هذه العلاقة.

### النشاط 1

### استكشاف التغيُّر العكسي Exploring Inverse Variation

تعهّدت إحدى فرق الكشّافة بزراعة 500 شجرة لتحريج منطقة جرداء. قُدِّر عدد الأشجار التي يزرعها كل فريق بعشر شجرات في الساعة.

1. ما الزمن الذي يلزم فريقًا واحدًا لزراعة الأشجار كلِّها؟
2. ما الزمن الذي يلزم 50 فريقًا للقيام بالعمل نفسه؟
3. ما الزمن الذي يلزم 100 فريق؟
4. اكتب دالّة تمثِّل الزمن بالساعات مرموزًا إليه بالمتغيِّر $t$، الذي يلزم $x$ فريقًا، لزراعة الأشجار كلّها.

نقطة مراقبة √

### التغيُّر العكسي Inverse Variation

يرتبط المتغيّران $x$ وَ $y$ **بعلاقة تغيُّر عكسي** إذا كان ناتج ضربهما ثابتًا مهما تغيَّرت قيَمهما. هذا يعني أن $xy = h$ ، حيث $h$ عدد حقيقيّ مختلف عن الصفر، يُدعى **ثابت علاقة التغيُّر العكسي Constant of The Inverse Variation Relation**.

تفرض العلاقة $xy = h$ ، حيث $h \neq 0$، ألاّ يتَّخذ أيّ من المتغيّرَين قيمة الصفر. يُعبَّر عن علاقة التغيُّر العكسيّ السابقة بالكتابة التالية $y = \frac{h}{x}$ .

## النشاط 2

### استكشاف دالّة المقلوب Exploring The Inverse Function

**1.** انسخ الجدول التالي وأكمله، حيث $y = \frac{1}{x}$ .

| $x$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | |
| $xy$ | | | | | | | | | |

حل المسائل

**2. ابحثْ عن نمط** ماذا تقول عن قيَم $y$ عندما تتزايد قيَم $x$؟ ماذا تقول عن قيَم $y$ عندما تتناقص قيَم $x$؟

**3.** كرِّر خطوة البند 1 حيث $y = \frac{2}{x}$ أو $y = \frac{4}{x}$. هل تعتقد أن النمط الذي وجدته في السؤال يبقى صالحًا، إذا كان $y = \frac{3}{x}$ ؟ كرِّر الخطوة الأولى حيث $y = \frac{3}{x}$.

نقطة مراقبة √

**4.** كيف يتغيَّر $y = \frac{h}{x}$ حيث $h > 0$ ، عندما تتزايد قيَم $x$ ، وكذلك عندما تتناقص؟

**5.** إذا كان $y = \frac{h}{x}$ حيث $h > 0$، فهل يُمكن للمتغيِّر $x$ أن يتَّخذ قيمة الصفر؟ علِّل ذلك.

إذا عرفت قيمة للمتغيِّر $x$ وقيمة المتغيِّر $y$ التي تقابلها في علاقة تغيُّر عكسيّ، فإن بإمكانك أن تحسب ثابت هذا التغيُّر، $h$، وأن تكتب $y$ كدالّة في المتغيِّر $x$، على الصورة التالية: $y = \frac{h}{x}$. غالبًا ما تكون القيَم، التي يتَّخذها المتغيِّران $x$ وَ $y$، في مسائل الواقع، موجبة.

### مثـــال 1

يرتبط المتغيِّران $x$ وَ $y$ بعلاقة تغيُّر عكسيّ، بحيث أن $y = 13.5$ عندما $x = 4.5$.

**أ** احسبْ ثابت التغيُّر واكتب معادلة العلاقة التي تربط بين $x$ وَ $y$.

**ب** احسبْ قيَم $y$ المقابلة للقيَم التالية: $x = 0.5$ ، $x = 1$ ، $x = 1.5$ ، $x = 2$ ، $x = 2.5$ .

#### الحـل

**أ** $h = xy = 4.5 \times 13.5 = 60.75$ . يمكنك، إذًا، أن تكتب $y = \frac{60.75}{x}$ .

**ب** باستعمال الحاسبة، يمكنك إيجاد قيَم $y$ التي تقابل كلاًّ من قيَم $x$ المحدَّدة في السؤال. يبيِّن الجدول المقابل قيَم $x$ وقيَم $y$ التي تقابلها.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0.5 | 121.5 |
| 1 | 60.75 |
| 1.5 | 40.5 |
| 2 | 30.375 |
| 2.5 | 24.3 |

**حـــاولْ** يرتبط المتغيِّران $x$ و $y$ بعلاقة تغيُّر عكسيّ، بحيث أن $y=120$ عندما $x=6.5$ .
احسبْ ثابت التغيُّر، واكتبْ معادلة العلاقة التي تربط بين $x$ وَ $y$. احسبْ، بعد ذلك، قيَم $y$ المقابلة للقيَم التالية: $x=1.5$ ، $x=4.5$ ، $x=8$ ، $x=12.5$ ، $x=14$ .

## دالّة المقلوب Inverse Function

رأيت قبل قليل أن المعادلة $y=\frac{h}{x}$ ، حيث $h\neq 0$ ، تعبِّر عن علاقة تغيُّر عكسيّ بين المتغيِّرين $x$ وَ $y$.
تُعرِّف هذه الكتابة المتغيِّر $y$ كدالّة بدلالة المتغيِّر $x$. أبسَطُ هذه الدوالّ هي الدالّة التي ثابت التغيُّر فيها يساوي 1. إنها الدالّة المعرَّفة بالمعادلة $f(x)=\frac{1}{x}$ .

### دالّة المقلوب Inverse Function

**دالّة المقلوب** هي الدالّة المُعرَّفة بالمعادلة $f(x)=\frac{1}{x}$ .

يبيِّن الشكل المقابل بيان دالّة المقلوب.
إذا أمعنت النظر في هذا البيان، تلاحظ الأمور التالية:

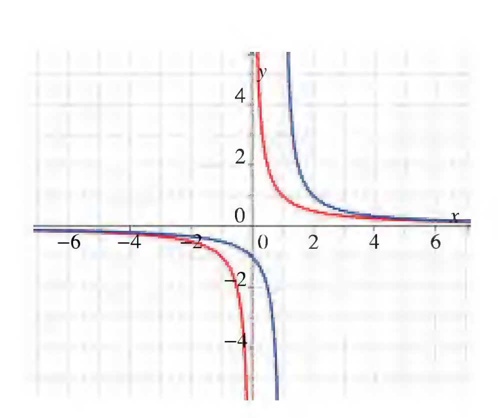
1. يُمكنك أن تحسب قيمة $y$ المقابلة لقيمة $x$ مهما تكن القيمة التي يتَّخذها $x$ باستثناء الصفر. مجال دالّة المقلوب هو، إذًا، مجموعة الأعداد الحقيقيّة المختلفة عن الصفر.
2. كلما تزايدت قيَم $x$ تناقصت قيَم $y$. تُعبِّر عن ذلك بالقول إن الدالّة **متناقصة Decreasing**.
3. عندما يكون المتغيِّر $x$ موجبًا وتتزايد قيَمه، تقترب قيَم $y$ من الصفر مع بقائها موجبة. تُعبِّر عن ذلك بالقول إن $y$ **يسعى إلى الصفر موجبًا عندما يسعى $x$ إلى** $+\infty$ .
4. عندما يكون المتغيِّر $x$ سالبًا وتتناقص قيَمه، تقترب قيَم $y$ من الصفر مع بقائها سالبة. تُعبِّر عن ذلك بالقول إن $y$ **يسعى إلى الصفر سالبًا عندما يسعى $x$ إلى** $-\infty$ .
5. تقترب قيَم $y$ من الصفر كلّما اتَّخذ المتغيِّر $x$ قيَمًا يتزايد مطلقها أكثر فأكثر. تعبِّر عن ذلك بالقول إن المستقيم المتمثِّل بالمعادلة $y=0$ ، أي المحور الأول، يشكِّل **محاذيًا (مُقاربًا) أفقيًّا Horizontal Asymptote** لبيان دالّة المقلوب.
6. كلما تزايدت القيَم السالبة للمتغيِّر $x$، تناقصت قيَم $y$ مع بقائها سالبة. تعبِّر عن ذلك بالقول إن $y$ **يسعى إلى** $-\infty$**، عندما يسعى $x$ إلى الصفر من اليسار.**
7. كلما تناقصت القيَم الموجبة للمتغيِّر $x$، تزايدت قيَم $y$ مع بقائها موجبة. تعبِّر عن ذلك بالقول إن $y$ **يسعى إلى** $+\infty$ **عندما يسعى $x$ إلى الصفر من اليمين.**
8. يتزايد مُطلق قيَم $y$ أكثر فأكثر كلّما اتَّخذ المتغيِّر $x$ قيَمًا يتناقص مطلقها أكثر فأكثر. تعبِّر عن ذلك بالقول إن المستقيم المتمثِّل بالمعادلة $x=0$ ، أي المحور الثاني، يشكِّل **محاذيًا (مُقاربًا) عموديًّا Vertical Asymptote** لبيان دالّة المقلوب.

**مثـــــال** 2 ارسم في المستوي الإحداثيّ نفسه بيان دالّة المقلوب، وبيان الدالّة $f(x)=\frac{1}{x-1}$ .
ما التحويل الهندسيّ الذي يُحوِّل البيان الأول إلى البيان الثاني؟



**الحـــل**

يُظهر الشكل المقابل أن الانتقال من بيان دالّة المقلوب إلى بيان الدالّة الثانية، يتمّ بسحب أفقي نحو اليمين مداه 1. لاحظ أن المستقيم المتمثِّل بالمعادلة $x=1$ هو مُحاذي عموديّ لبيان الدالّة الثانية، وهو صورة المُحاذي العموديّ لدالّة المقلوب بالسحب الأفقيّ نفسه.




**حـــاولْ** ارسم في المستوي الإحداثيّ نفسه بيان دالّة المقلوب، وبيان الدالّة $f(x)=\frac{1}{x+1}$ .
ما التحويل الهندسي الذي يحوِّل البيان الأول إلى البيان الثاني؟

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

**1** اكتب معادلة تعبِّر عن ارتباط المتغيِّرين $x$ وَ $y$ بعلاقة تغيُّر عكسي ثابتها $h$. اكتب معادلة أخرى تعبِّر عن ذلك.

**2** أوضحْ ما يعنيه القول بأن علاقة تغيُّر عكسيٍّ تربط بين السرعة والزمن. أعطِ مثالاً من الحياة اليومية على ذلك.

**3** يرتبط المتغيِّران $x$ وَ $y$ بعلاقة تغيُّر عكسي، بحيث أن $y=3$ عندما $x=8$.
كيف تجد قيمة $y$ عندما $x=2$ ؟

## تمارين موجَّهة

**يرتبط المتغيِّران $x$ وَ $y$ بعلاقة تغيُّر عكسي. اكتب معادلة تعبِّر عن هذه العلاقة.**

**4** $y=12$ عندما $x=60$ .

**5** $y=3$ عندما $x=4$ .

**يبيِّن الجدول قيَم المتغيِّر $x$ وقيَم المتغيِّر $y$ التي تقابلها. هل يرتبط المتغيِّران بعلاقة تغيُّر عكسيّ؟ علِّلْ جوابك. اكتب معادلة تعبِّر عن علاقة التغيُّر العكسيّ في حال وجودها.**

**6**

| $x$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 12 | 8 | 6 |

**7**

| $x$ | 4 | 15 | 20 | 60 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 30 | 8 | 6 | 2 |

**8**

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 10 | 9 | 8 | 7 |

**9**

| $x$ | 5 | 15 | 25 | 75 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 45 | 15 | 9 | 3 |

## تمارين وتطبيقات

**هل تعبّر المعادلة بين $x$ وَ $y$ عن علاقة تغيُّر عكسيّ بين المتغيّرين؟**

**10** $xy = 400$ **11** $y = \frac{-28}{x}$ **12** $y = 10 - x$ **13** $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

**14** $x = 10y$ **15** $\frac{x}{5} = \frac{3}{y}$ **16** $x = y$ **17** $y = \frac{42}{x}$

**في التمارين من 18 إلى 23، يرتبط $x$ وَ $y$ بعلاقة تغيُّر عكسيّ.**

**18** $y = 8$ عندما $x = 6$ . ما قيمة $y$ إذا كان $x = 12$ ؟

**19** $y = 9$ عندما $x = 12$ . ما قيمة $y$ إذا كان $x = 36$ ؟

**20** $y = 3$ عندما $x = 32$ . ما قيمة $x$ إذا كان $y = 4$ ؟

**21** $y = 3$ عندما $x = -8$ . ما قيمة $x$ إذا كان $y = -4$ ؟

**22** $y = \frac{3}{5}$ عندما $x = -60$ . ما قيمة $y$ إذا كان $x = 2$ ؟

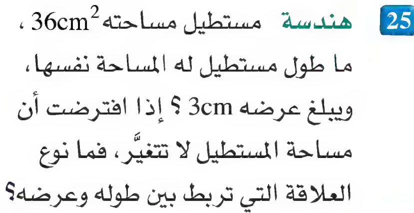
**23** $y = \frac{3}{4}$ عندما $x = 12$ . ما قيمة $y$ إذا كان $x = 27$ ؟

ربط

**24** **هندسة** مثلّث مساحته ثابتة، ما نوع العلاقة التي تربط بين قاعدته وارتفاعه؟ يبلغ ارتفاع المثلّث 36cm عندما تكون قاعدته 22cm. ما طول قاعدته إذا أصبح ارتفاعه 24cm؟



**25** **هندسة** مستطيل مساحته $36cm^2$ ، ما طول مستطيل له المساحة نفسها، ويبلغ عرضه 3cm ؟ إذا افترضت أن مساحة المستطيل لا تتغيَّر، فما نوع العلاقة التي تربط بين طوله وعرضه؟



**26** **ميكانيكا** تربط علاقة تغيُّر عكسيّ بين سرعة دوران قرص مسنّن وعدد أسنانه. ما سرعة قرص له 20 سنًّا، علمًا بأن سرعة قرص له 16 سنًّا تبلغ 500 دورة في الدقيقة؟

**سفر** **تربط علاقة تغيُّر عكسي بين معدَّل سرعة وسيلة نقل والزمن اللازم لقطع مسافة محدّدة.**

**27** قطع آمانج مسافة ما خلال 6 ساعات، وكان معدَّل سرعته 80km/h . ما الزمن الذي يلزمه لقطع المسافة نفسها، لو كان معدّل سرعته 90km/h ؟

**28** طائرة يلزمها 2.7 ساعة، لقطع المسافة بين مدينتَين، بمعدَّل سرعة يبلغ 1020km/h ما الزمن الذي يلزم هذه الطائرة لقطع المسافة نفسها، عندما تطير بسرعة معدَّلها 810km/h ؟

**29** **فيزياء** تربط علاقة تغيُّر عكسيّ بين طول موجة من موجات الراديو وذبذبتها. ما طول موجة تبلغ ذبذبتها 2000 كيلوسايكل علمًا بأن ذبذبة موجة طولها 200m تبلغ 3000 كيلوسايكل؟

**30** **موسيقا** يهتزّ وتر العود فيحدث صوتًا. تربط علاقة تغيُّر عكسيّ بين عدد ذبذبات الوتر وطوله. ما طول وتر يتذبذب 370 مرّة في الثانية، علمًا بأن ذبذبات وتر طوله 28cm تبلغ 518 ذبذبة في الثانية؟

## نظرة إلى الوراء

**أعد كتابة كلّ مقدار مستعملاً أسًّا موجبًا فقط.**

**31** $x^{-1}$ **32** $ab^{-3}$ **33** $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$

**34** $y^{-2}b^{3}c^{-5}d$ **35** $\left[(x^{-3})^{-2}\right]^{-3}$

**حدِّد إحداثيَّيْ رأس القطع المكافئ ومعادلة محوره.**

**36** $y=-3x^2+5$ **37** $y=x^2+2x-3$ **38** $y=-x^2-5x+6$

**39** $y=x^2+2$ **40** $y=x^2+x+1$ **41** $y=2x^2-3x+2$

**ما درجة الحدودية؟**

**42** $3x^5-2x^4+x^2-1$ **43** $2-5x+7x^2-x^3$ **44** $-5x^3-x^4+1$

## نظرة إلى الأمام

**45** أنشئ جدول قيَم للدالّة $f(x)=\frac{1}{x+2}$ بإعطاء $x$ القيَم من $-3$ حتى $-1$، بتدرُّج تبلغ خطوته 0.1. استعمل هذا الجدول لوصف قيَم $y$ عندما تقترب قيم $x$ من $-2$.




# الدوالّ النسبيَّة Rational Functions

**الأهداف**

- يميِّز الدالّة النسبيّة ويحسب قيَمها.
- يرسم بيان دالّة نسبيّة ويحدِّد مجالها ومعادلات مقارباتها.



**لماذا**

تُستعمل الدوال النسبيّة لتمثيل العديد من العلاقات في الواقع. غالبًا ما تُستعمل هذه الدوال لحلّ مسائل تتعلّق بإنتاج مزيج.

يعمل أحمد في أحد المختبرات الكيميائيّة. غالبًا ما يتطلّب عمله تعديل نسبة الملوحة في محلول ما. يستطيع أحمد أن يستعمل دالّة نسبيّة لتمثيل نسبة الملوحة في المحلول.

## مثــــال 1

**تطبيـــقات**
**كيمياء**

**مع أحمد 65ml من محلول تبلغ نسبة ملوحته 10%. أضاف $x$ ml من الماء المقطَّر للحصول على محلول جديد.**

أ اكتب دالّة تمثّل نسبة ملوحة المحلول الجديد $c$ بدلالة كمّية الماء المقطَّر $x$ الذي أضيف.

ب ما نسبة ملوحة المحلول الجديد، إذا كانت الكمّية التي أضافها أحمد 100ml؟

**الحـل**

أ كمّية الملح في المحلول الأصلي:

$$\frac{6.5}{65}$$ ← ملح ← محلول

$$10\% \times 65 = 6.5$$

كمّية الملح في المحلول الجديد:

أضف $x$ ml من الماء المقطَّر.

$$\frac{6.5}{65+x}$$ ← ملح ← محلول

دالّة نسبة الملوحة في المحلول الجديد:

$$c(x) = \frac{6.5}{65+x}$$

ب لحساب نسبة الملوحة بعد إضافة 100ml من الماء المقطَّر، احسب قيمة الدالّة حيث $x = 100$ .

$$c(100) = \frac{6.5}{65+100} \approx 0.039$$ أو 3.9%

**المقدار النسبي Rational Expression** هو نسبة حدوديتَيْن. **الدالّة النسبيّة Rational Function** هي دالّة معرَّفة بواسطة مقدار نسبيّ. فالدالّة $c(x)=\frac{6.5}{65+x}$ ، في المثال 1، هي دالّة نسبيّة معرَّفة بالمقدار النسبيّ $\frac{6.5}{65+x}$ .

**نقطة مراقبة** √ هل الدالّة $f(x)=\frac{x^2+2}{|x|}$ دالّة نسبية؟ علِّل ذلك.

**دالّة المقلوب** $f(x)=\frac{1}{x}$ هي أبسط الدوالّ النسبية. رأيت في الدرس السابق أنّه لا يُمكن حساب قيمتها عندما يتَّخذ المتغيِّر $x$ قيمة الصفر. بصورة عامة، يتكوَّن مجال دالّة نسبيّة من مجموعة الأعداد الحقيقيّة باستثناء تلك التي تحوِّل المقام إلى صفر. تُسمّى الأعداد التي تحوِّل المقام إلى صفر **الأعداد الممنوعة Excluded Values** على المتغيِّر $x$.

**مثـــــال** 2 حدِّد مجال الدالّة $f(x)=\frac{x^2-12x+12}{x^2+9x+20}$

**الحـل**

ابدأ بتحديد القيَم الممنوعة على $x$، وذلك بإيجاد جذري المعادلة $x^2+9x+20=0$ .

$$x^2+9x+20=0$$

$$(x+4)(x+5)=0$$

$$x=-4 \quad \text{أو} \quad x=-5$$

إذًا، مجال الدالّة هو، مجموعة الأعداد الحقيقيّة باستثناء $-4$ وَ $-5$.

**حـــاولْ** حدِّد مجال الدالّة $f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ .

## المحاذيات العموديّة Vertical Asymptotes

تذكّر أن لدالّة المقلوب محاذيًا عموديًّا معادلته $x=0$ ، ومحاذيًا أفقيًّا معادلته $y=0$ . بصورة عامة، يمكن أن يكون لدالّة نسبية محاذياتأفقية ومحاذياتعموديّة. سوف تستكشف ذلك في النشاط التالي.

**النشاط**

### استكشاف المحاذيات العموديّة Exploring Vertical Asymptotes

1. استعمل الدالّة $y=\frac{1}{x-2}$ .

أ انسخِ الجدول أدناه، واستعمل الحاسبة لإكماله.

| $x$ | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | | |

ب انسخِ الجدول أدناه، واستعمل الحاسبة لإكماله.

| $x$ | 3 | 2.9 | 2.8 | 2.7 | 2.6 | 2.5 | 2.4 | 2.3 | 2.2 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | | |

**نقطة مراقبة √** 2. ماذا تقول عن $y$ عندما يقارب $x$ العدد 2 من اليسار باتِّخاذه قِيَمًا أقرب فأقرب؟ ماذا تقول عن $y$ عندما يقارب $x$ العدد 2 من اليمين باتِّخاذه قِيَمًا أقرب فأقرب؟ كيف تتوقَّع أن تكون قيمة $y$ لو كان بإمكان $x$ أن يتَّخذ القيمة 2؟

**نقطة مراقبة √** 3. استعمل الآن الدالّة $y=\frac{1}{x+3}$. استعمل الحاسبة لحساب قِيَم $y$ عندما يقارب $x$ العدد $-3$ من اليسار؛ ثمّ من اليمين باتِّخاذه قِيَمًا أقرب فأقرب. كيف تتوقع أن تكون قيمة $y$ لو كان بإمكان $x$ أن يتَّخذ القيمة 3؟

تُسمّى الأعداد الحقيقيّة التي لا تسمح للدالّة النسبية بأن تكون معرّفة، **أعدادًا ممنوعة Excluded Values** عائدة إلى الدالّة. يتكوّن مجال الدالّة النسبية من مجموعة الأعداد الحقيقيّة، باستثناء الأعداد الممنوعة العائدة إليها.

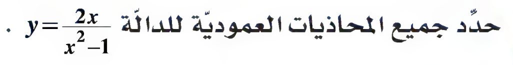
**نقطة مراقبة √** حدِّدِ القيَم الممنوعة للدالّة $y=\frac{x+3}{x^2-x-6}$.

يمكن أن يكون لدالّة نسبيّة محاذي عموديّ عند عدد ممنوع. فيما يلي شرط وجود مثل هذا المقارب:

### المحاذيات العمودية Vertical Asymptotes

إذا كان $x-a$ عاملاً من عوامل مقام دالّة نسبيّة دون أن يكون عاملاً من عوامل بسطها، يكون المستقيم $x=a$ محاذيًا عموديًّا للدالّة.

**مثـــــال**



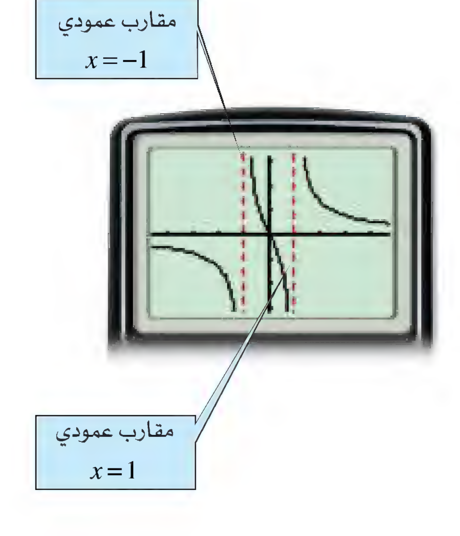

3 حدّد جميع المحاذيات العموديّة للدالّة $y=\frac{2x}{x^2-1}$.



**الحـل**

ابدأ بتحليل المقام. $y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$.

العددان الممنوعان، هما: 1 وَ $-1$. بما أن أيًّا من عاملَي المقام ليس عاملاً للبسط، فإن المستقيمين $x=1$ وَ $x=-1$ محاذيان عمودنان للدالّة.




**تحقَّق**

ارسم بيان الدالّة $y=\frac{2x}{x^2-1}$ باستعمال الحاسبة البيانيّة. وتحقّقْ من أن المستقيمين $x=1$ وَ $x=-1$ محاذيان عموديان لهذه الدالّة.

**حـــاولْ** حدِّد جميع المحاذيات العموديّة للدالّة $y=\frac{x}{x^2+5x+6}$.

**نقطة مراقبة √** اكتب دالّة نسبيَّة بسطها 1، بحيث يكون المستقيمان $x=2$ وَ $x=-2$ محاذيين عموديَّين لها.

## المحاذيات الأفقية Horizontal Asymptotes

سوف تستعين بالدالّة $y=\frac{3x^2}{-5+2x^2}$ لتتفحّص المحاذيات الأفقيّة لدالّة نسبيّة. يبيِّن الرسم المقابل أن المستقيم $y=\frac{3}{2}$ محاذي أفقيّ للدالّة.

يبيِّن الجدولان التاليان أن قيمة $y$ تقترب من $\frac{3}{2}$ كلما ابتعدت قيَم $x$ عن الصفر باتجاه $+\infty$ أو باتجاه $-\infty$ .





تبتعد قيَم $x$ عن الصفر باتجاه $+\infty$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | 1.5385 |
| 20 | 1.5094 |
| 30 | 1.5042 |
| 40 | 1.5023 |
| 50 | 1.5015 |
| 60 | 1.501 |
| 70 | 1.5008 |

تقترب قيمة $y$ من $\frac{3}{2}$

تبتعد قيَم $x$ عن الصفر باتجاه $-\infty$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −10 | 1.5385 |
| −20 | 1.5094 |
| −30 | 1.5042 |
| −40 | 1.5023 |
| −50 | 1.5015 |
| −60 | 1.501 |
| −70 | 1.5008 |

تقترب قيمة $y$ من $\frac{3}{2}$

عندما يكون لبسط الدالّة النسبيّة ومقامها الدرجة نفسها، فإنك تستطيع أن تستعمل المعامل الرئيس لكلّ منهما (3 للبسط وَ 2 للمقام) لكتابة معادلة المحاذي الأفقي لبيان الدالّة، $y=\frac{3}{2}$ .

### المحاذيات الأفقيَّة Horizontal Asymptotes

- إذا كانت درجة البسط أقلّ من درجة المقام، يكون المستقيم $y=0$ محاذيًا أفقيًّا للدالّة.
- إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فلا توجد محاذياتأفقيّة للدالّة.
- إذاكانت درجة البسط تساوي درجة المقام، وكان $a$ المعامل الرئيس للأول وَ $b$ المعامل الرئيس للثاني، يكون المستقيم $y=\frac{a}{b}$ محاذيًا أفقيًّا الدالّة.

### مثـــــال 4

حدِّد جميع المحاذيات (الأفقيَّة والعموديَّة) للدالّة $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$

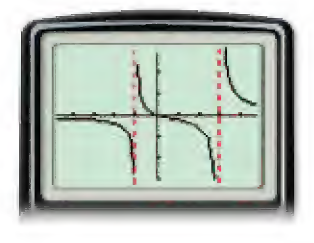
**الحـل**

1. ابدأ بتحليل المقام لتحديد المحاذيات العموديَّة.

$$y=\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{2x}{(x-3)(x+1)}$$

بما أن كلاًّ من عاملَي المقام ليس عاملاً للبسط، فإن للدالّة محاذيين عموديَّيْن هما المستقيمان $x=3$ و $x=-1$ .

2. بما أن درجة البسط أقلّ من درجة المقام، فإن للدالّة محاذيًا أفقيًّا وحيدًا هو المستقيم $y=0$ .



**تحقَّقْ**

استعمل الحاسبة البيانية لرسم بيان الدالّة $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ وتفحَّص المحاذيات.

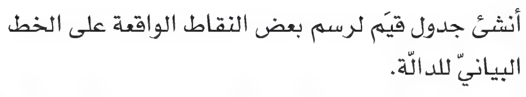
## استعمال المقاربات لرسم البيان Using Asymptotes to Graph

سوف تتعلّم في المثال 5 كيف تستعمل المحاذيات لرسم بيان دالّة نسبيّة.

**مثال 5** ارسم بيان الدالّة $y=\frac{x+2}{x-2}$ مبيّنًا جميع المقاربات.

**الحل**

ابدأ بكتابة معادلات المحاذيات ثم ارسمها. هناك محاذي عموديّ واحد معادلته $x=2$ ومحاذي أفقيّ واحد معادلته $y=1$.



أنشئ جدول قيَم لرسم بعض النقاط الواقعة على الخط البيانيّ للدالّة.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{1}{3}$ | $-1$ | $-3$ | $5$ | $3$ | $2\frac{1}{3}$ |

بعد ذلك، ارسم النقاط، ثمّ صلْ بين نقاط كل فرع بخطٍّ منحنٍ مناسب.



# التمارين

## تمارين موجّهة

1. كيف تحدِّد الأعداد الممنوعة على دالّة نسبيّة؟
2. كيف تعرف أنّ العامل $x-a$ لمقام دالّة نسبيّة يُحدِّد محاذيًا عموديًّا لها أم لا؟
3. كيف تستعمل المحاذيات لرسم بيان الدالّة $y=\frac{x-5}{x-3}$ ؟

## تمارين وتطبيقات



4. **كيمياء** بالعودة إلى مسألة نسبة الملوحة في أول الدرس، اكتب معادلة الدالّة التي تحدِّد نسبة الملوحة في المحلول الجديد، إذا أضاف أحمد x ml من الماء المقطّر إلى 90ml من محلول تبلغ نسبة ملوحته 15%. كم تكون نسبة ملوحة المحلول الجديد لو أن أحمد أضاف 150ml من الماء المقطّر إلى المحلول الأصلي.
5. حدِّد مجال الدالّة $f(x)=\frac{2x^2-5}{x^2-7x+12}$ .

**حدِّد جميع محاذيات الدالّة.**

6. $f(x)=\frac{3x-1}{4x^2-9}$
7. $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-9}$
8. $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$
9. ارسم بيان الدالّة $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ مبيّنًا جميع المحاذيات.

## تمارين وتطبيقات


هل الدالّة نسبيّة أم لا؟ إذا كانت نسبية، فحدِّد مجالها. وإذا لم تكن فعلِّلْ ذلك.

**10** $f(x)=\frac{x}{2x-7}$

**11** $f(x)=\frac{x+2}{2x}$

**12** $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

**13** $f(x)=\frac{x}{(2x-7)(x+3)}$

**14** $f(x)=\frac{5^x}{x^5}$

**15** $f(x)=\frac{|x^2-4|}{|x+2|}$

حدِّد جميع محاذيات الدالّة النسبيّة.

**16** $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$

**17** $f(x)=\frac{x+2}{2x^2}$

**18** $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

**19** $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+5x+6}$

**20** $f(x)=\frac{x^2-16}{4-5x+x^2}$

**21** $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

حدِّد مجال الدالّة النسبيّة. حدِّد جميع محاذياتها، ثم ارسم بيانها مستعينًا بالحاسبة البيانيّة.

**22** $f(x)=\frac{2x-2}{2x+2}$

**23** $f(x)=\frac{2x}{2x(x-5)}$

**24** $f(x)=\frac{(3x-1)(x+2)}{x+2}$

**25** $f(x)=\frac{x+1}{x^2+4x-21}$

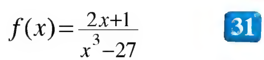
**26** $f(x)=\frac{3x-1}{9x^2-36}$

**27** $f(x)=\frac{7x+8}{x^2-10x+25}$

**28** $f(x)=\frac{5x^2+1}{5x^2+3}$

**29** $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

**30** $f(x)=\frac{x(x^2-4)}{x^2-7x+6}$


**31** $f(x)=\frac{2x+1}{x^3-27}$

اكتبْ دالّة نسبيّة لها المحاذيات المبيَّنة.

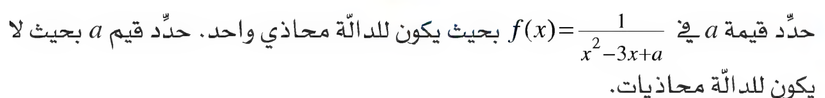
**32** $x=2$ وَ $y=3$

**33** $x=-2$ وَ $y=0$

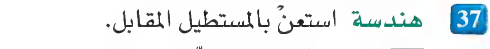
**34** $x=1$ وَ $x=-1$ وَ $y=2$

**35** $x=2$ وَ $x=-3$ وَ $y=-1$

**تحدٍّ**


**36** حدِّد قيمة $a$ في $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+a}$ بحيث يكون للدالّة محاذي واحد. حدِّد قيم $a$ بحيث لا يكون للدالّة محاذيات.

**ربط**


**37** **هندسة** استعنْ بالمستطيل المقابل.

$2x+1$ ، $x+1$

أ اكتبْ دالّة نسبيّة تمثِّل نسبة المحيط إلى المساحة.

ب ما قيَم $x$ التي تجعل حساب المحيط ممكنًا؟ التي تجعل حساب المساحة ممكنًا؟ حدِّد مجال الدالّة التي كتبتها.


**38** **هندسة** استعن بالدائرة المقابلة.

$x$


أ اكتبْ دالّة نسبيّة تمثِّل نسبة المحيط إلى المساحة.

ب ما قيَم $x$ التي تجعل حساب المحيط ممكنًا؟ التي تجعل حساب المساحة ممكنًا؟ حدِّد مجال الدالّة التي كتبتها.

## تطبيقات

**39** **كيمياء** أضافت ميساء x ml من الماء المقطّر إلى 72ml من محلول تبلغ نسبة ملوحته 8%.

أ) اكتب دالّة نسبيّة تمثّل نسبة ملوحة المحلول الجديد.

ب) ما نسبة ملوحة المحلول الجديد، علمًا بأن ميساء أضافت 720ml من الماء المقطّر.

**40** **اقتصاد** يملك محمود متجرًا لبيع الزهور. تبلغ الكلفة الثابتة للمتجر 950 ألف دينارًا في الأسبوع، وتبلغ كلفة طاقة الزهور 42.45 ألف دينارًا.

أ) اكتب دالّة $g$ تمثّل الكلفة الإجمالية على مدى أسبوع، باع المتجر خلاله $x$ طاقة زهور.

ب) اكتب دالّة تمثّل الكلفة الإجمالية لكل طاقة خلال ذلك الأسبوع.

**41** **فيزياء** كلّما ارتفع الإنسان في الفضاء قلَّ وزنه. وقد وجد العلماء أن العلاقة بين وزن إنسان على سطح الأرض $W_0$ ووزنه $W$ في الفضاء على ارتفاع $h$ كيلومتر هي:

$$W(h)=W_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2.$$

أ) الدالّة $W$ دالّة نسبيّة. علّل ذلك.

ب) وزن إنسان على سطح الأرض $75kg$. أنشئ جدولاً يبيّن وزنه على ارتفاعات 10km وَ 20km وَ 100km.

ج) على أيّ ارتفاع تقريبًا يبلغ وزن إنسان نصف وزنه على سطح الأرض؟



## نظرة إلى الوراء





**حُلّ.**

**42** $|5x-6|>2$　**43** $|x+5|\geq 7$

**44** $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\leq\frac{7}{2}$　**45** $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\leq-\frac{7}{2}$

**اكتب كل مقدار على الصورة العامّة للمقدار التربيعيّ $ax^2+bx+c$.**

**46** $-12x(3x-2)$　**47** $(3x-1)(6x-7)$　**48** $(4-5x)(x-9)$

**49** $(x-5)(2x+3)$　**50** $(3x-4)(3x+4)$　**51** $-4(x-3)^2$

**حلّل كل مقدار.**

**52** $3x^2-6x$　**53** $1-25y^2$　**54** $9x^2-49$

**55** $x^2-5x-24$　**56** $x^2+12x+36$　**57** $x^2-16x+64$

## نظرة إلى الأمام

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

**58** $\frac{9}{3}$　**59** $\frac{x^2}{x}$　**60** $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

# ضرب المقادير النسبيّة وقسمتها

## Multiplying and Dividing Rational Expressions



**لماذا**

يتطلّب حلّ بعض المسائل ضرب المقادير النسبيّة وقسمتها. ومثالها دراسة كلفة حفل خيري ومردوده.



**الأهداف**

- يضرب المقادير النسبيّة ويقسمها.
- يكتب المقادير النسبيّة على أبسط صورة.

**تطبيقات**
**أعمال خيرية**

تقيم ثانوية الكندي، بمناسبة اقتراب شهر رمضان المبارك، حفلاً خيريًّا لجمع بعض المال، وإنفاقه من ثَمَّ على المحتاجين. قرَّر الطلاب الذين نظّموا الحفل إعداد شالات يبيعونها للزوّار. بغية دراسة ما سيدرُّ هذا الحفل من أموال، استعملوا النسبة التالية:

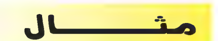
$$\frac{\text{ثمن بيع قطعة واحدة}}{\text{كلفة إعداد قطعة واحدة}}$$

توصّل الطلاب إلى أن كلفة إنتاج $x$ شالاً تبلغ $0.8x+25$. فقرَّروا تحديد 3 آلاف دينار ثمنًا للشال الواحد. كم ينبغي أن يبيعوا من الشالات حتى لا تقلّ نسبة ثمن القطعة الواحدة إلى كلفة إعدادها عن 1.5.

لكي تجيب عن هذا السؤال، ستكتب مقدارًا نسبيًّا وتبسِّطه.

## تبسيط المقادير النسبية Symplifying Rational Expressions

يتم **تبسيط مقدار Simplify** جبري بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، وتكرار الأمر حتى لا يبقى مجال لذلك. عندئذٍ تقول عن المقدار الناتج أنه على **أبسط صورة Simplist Form**.



**مثـــال 1** اكتب المقدار $\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}$ على أبسط صورة.

**الحـل**

$\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}=\frac{(x+6)(x-1)}{(x-6)(x+6)}$ حلِّل البسط والمقام

$=\frac{\cancel{(x+6)}(x+1)}{(x-6)\cancel{(x+6)}}$ اقسم كلاًّ من البسط والمقام على العامل المشترك

$=\frac{x-1}{x-6}$

لاحظ أن العددين 6 وَ $-6$ يشكِّلان الأعداد الممنوعة العائدة إلى المقدار الأصلي.

**حـــاولْ** بسِّطِ المقدار $\frac{b^2-49}{b^2-8b+7}$

## ضرب المقادير النسبيّة Multiplying Rational Expressions

ضرب المقادير النسبيّة شبيه بضرب الأعداد النسبيّة.

| ضرب الأعداد النسبيّة | ضرب المقادير النسبيّة |
| --- | --- |
| $\frac{15}{4}\times\frac{14}{9}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times 5}{\underset{2}{\cancel{4}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\times 7}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{35}{6}$ | $\frac{15}{x^2}\times\frac{4x^4}{21}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times 5}{\underset{1}{\cancel{x^2}}}\times\frac{4\overset{x^2}{\cancel{x^4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\times 7}=\frac{20x^2}{7}$ |



**2** اكتب المقدار $\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}$ على أبسط صورة.

**الحل**

$$\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times\overset{1}{\cancel{4}}\times\overset{1}{\cancel{2}}\times\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{4}}\times\underset{1}{\cancel{3}}\times\underset{1}{\cancel{7}}\times\underset{1}{\cancel{2}}\times 2}\times\frac{\overset{1}{\cancel{x^3}}}{\underset{x^4}{\cancel{x^7}}}=\frac{1}{2x^4}$$

**حاول** اكتب المقدار $\frac{28}{4b^3}\times\frac{4b^5}{21}\times\frac{3}{49b^4}$ على أبسط صورة.

لكي تضرب مقدارًا نسبيًّا في آخر، طبِّق قواعد ضرب الكسور.

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ حيث $b\neq 0$ وَ $d\neq 0$.

يمكنك تبسيط ناتج الضرب عبر اختزال العوامل المشتركة بين البسط والمقام.



**3** اكتب المقدار $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ على أبسط صورة.

**الحل**

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\frac{\overset{1}{\cancel{x+1}}}{\underset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-1)}\times\frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{(x-3)\underset{1}{\cancel{(x+1)}}}$$

$$=\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

**حاول** اكتب المقدار $\frac{x^2-25}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-4}{x^2+2x-15}$ على أبسط صورة.

**تفكير ناقد** كتب سامي المقدار $\frac{2x+3}{5y+3}$ على الشكل التالي $\frac{2x+\cancel{3}}{5y+\cancel{3}}=\frac{2x}{5y}$ وقال إنه على أبسط صورة.
هل أصاب؟ وضِّح ذلك.

## قسمة المقادير النسبيّة Dividing Rational Expressions

قسمة مقدار نسبيّ على آخر تشبه قسمة عدد نسبيّ على آخر.

| قسمة الأعداد النسبيّة | قسمة المقادير النسبيّة |
| --- | --- |
| اضرب في مقلوب $\frac{12}{32}$ | اضرب في مقلوب $\frac{12}{x^5}$ |
| $\frac{6}{8}\div\frac{12}{32}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{8}}}\times\frac{\overset{4}{\cancel{32}}}{\underset{2}{\cancel{12}}}=\frac{4}{2}=2$ | $\frac{6}{x^3}\div\frac{12}{x^5}=\frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{x^3}}}\times\frac{\overset{x^2}{\cancel{x^5}}}{\underset{2}{\cancel{12}}}=\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2$ |

لكي تقسم مقدارًا نسبيًّا على آخر، اضربِ الأوّل في مقلوب الثاني.

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ حيث $b\neq 0$ و $c\neq 0$ و $d\neq 0$.

يمكنك تبسيط ناتج الضرب عبر اختزال العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

**مثـــــــال** 4 اكتب المقدار $\frac{x^2-3x-4}{x^2-4} \div \frac{x-4}{(x-2)^2}$ على أبسط صورة.

**الحـل**

$$\frac{x-4}{(x-2)^2} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-4} = \frac{x-4}{(x-2)^2} \times \frac{x^2-4}{x^2-3x-4}$$ اضرب في المقلوب

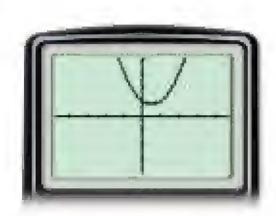
$$= \frac{\cancel{x-4}^{\,1}}{(x-2)\cancel{(x-2)}_{1}} \times \frac{\cancel{(x-2)}^{\,1}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-4)}_{1}}$$ اختزل العوامل المشتركة

$$= \frac{x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x^2-x-2}$$

**حـــاولْ** اكتب المقدار $\frac{x^2-9}{x^2-8x+15} \div \frac{(x+3)^2}{(x-5)}$ على أبسط صورة.

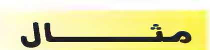
**تفكير ناقد** بسّط مروان المقدار $\frac{x-5}{7} \div \frac{1}{x-5}$ على الشكل التالي $\frac{\cancel{x-5}^{\,1}}{7} \div \frac{1}{\cancel{x-5}_{\,1}} = 1 \div 7 = 1 \times \frac{7}{1} = 7$ وقال إنه على أبسط صورة. هل أصاب؟ وضّح ذلك.

**حل المسائل** يمكنك استعمال الرسوم البيانية لتعرُّف حدوديات لا تقبل التحليل. فلكي تعرف إن كان $x^2-x+1$ يقبل التحليل أم لا، ارسم بيان الدالّة $y=x^2-x+1$ ، وتحقّق إن كان يقطع المحور الأول. بما أن هذا البيان لا يقطع المحور الأول فإن الحدودية $x^2-x+1$ لا أصفار لها في مجموعة الأعداد الحقيقيّة، وبالتالي لا تقبل التحليل. ينتج من ذلك أن المقدار النسبي $\frac{x^2-x+1}{x^2} \times \frac{x-4}{x-1}$ لا يقبل التبسيط.



## المقادير النسبيّة المعقّدة Complex Rational Expressions

المقادير النسبيّة المعقّدة مقادير نسبيّة تتضمَّن في البسط أو في المقام أو في كليهما مقادير نسبية.



**مثـــــــال** 5 اكتب المقدار $\dfrac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}}$ على أبسط صورة.

**الحـل**

$$\dfrac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}} = \frac{4a^2-1}{a^2-4} \div \frac{2a-1}{a+2}$$ اقسم البسط على المقام

$$= \frac{4a^2-1}{a^2-4} \times \frac{a+2}{2a-1}$$ اضرب الأول في مقلوب الثاني

$$= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-2)(a+2)} \times \frac{a+2}{2a-1}$$ حلِّل

$$= \frac{\cancel{(2a-1)}^{\,1}(2a+1)\cancel{(a+2)}^{\,1}}{(a-2)\cancel{(a+2)}_{1}\cancel{(2a-1)}_{1}}$$ اختزل العوامل المشتركة

$$= \frac{2a+1}{a-2}$$

**حـــاولْ** اكتب المقدار $\dfrac{\frac{(x+2)^2}{x-3}}{\frac{x^2-4}{(x-3)^2}}$ على أبسط صورة.

**تفكير ناقد** استعمل الحساب الذهنيّ لكتابة $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{y+x}{y-x}}$ على أبسط صورة.

**مثــــــال**

**6** بالعودة إلى المسألة المطروحة في بداية الدرس، **كم شالاً ينبغي أن يبيع الطلاب حتى لا تقلّ نسبة ثمن القطعة الواحدة إلى كلفة إعدادها عن 1.5؟**



الحــل

$\dfrac{\text{ثمن بيع قطعة واحدة}}{\text{كلفة إعداد قطعة واحدة}} = \dfrac{3}{\frac{0.8x+25}{x}}$ .

بسِّط المقدار المعقَّد: $\dfrac{3}{\frac{0.8x+25}{x}} = 3 \times \dfrac{x}{0.8x+25} = \dfrac{3x}{0.8x+25}$ .

أدخل الدالّة $y = \dfrac{3x}{0.8x+25}$ إلى الحاسبة البيانيّة، واستعمل وظيفة الجدولة. يبيِّن الجدول المقابل أن على الطلاب بيع ما لا يقلّ عن 21 شالاً.




# التمارين

## التواصل في الرياضيات

**1** بمَ يتشابه ضرب المقادير النسبيّة وضرب الأعداد النسبيّة؟

**2** بمَ تتشابه قسمة المقادير النسبيّة وقسمة الأعداد النسبيّة؟

**3** كيف تكتب مقدارًا معقَّدًا مثل $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{x}{x^2+2x-3}}$ على أبسط صورة؟ قارن بين مجموعة الأعداد المنوعة على $x$ في هذا المقدار، ومجموعة الأعداد المنوعة على $x$ في المقدار الأبسط.

## تمارين موجَّهة

**اكتب كل مقدار نسبيّ على أبسط صورة.**

**4** $\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

**5** $\dfrac{4x^2}{5} \times \dfrac{30}{x^4} \times \dfrac{30x^3}{60}$

**6** $\dfrac{x^2+8x+12}{x^2+2x-15} \times \dfrac{x^2+8x+15}{x^2+9x+18}$

**7** $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+6x+8} \div \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

**8** $\dfrac{\frac{2x-6}{x^2+9x+20}}{\frac{x^2-9}{x^2+5x+4}}$

## تمارين وتطبيقات

**اكتب كل مقدار نسبيّ على أبسط صورة.**

**9** $\dfrac{4x^2+8x+4}{x+1}$

**10** $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

**11** $\dfrac{15}{x^2} \times \dfrac{x^5}{12} \times \dfrac{4}{x}$

**12** $\dfrac{36x}{9x^2} \times \dfrac{12x^7}{2x} \times \dfrac{5}{x^2}$

**13** $\dfrac{x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$

**14** $\dfrac{-x^2-x+6}{x^2-5x+6}$

**15** $\dfrac{x}{9x^8}\times\dfrac{x^7}{2x}\times\dfrac{45}{x^4}$

**16** $\dfrac{-5}{x^3}\times\dfrac{-x^5}{3}\times\dfrac{-4}{x}\times\dfrac{20}{x^3}$

**17** $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}$

**18** $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

**19** $\dfrac{2x^2-2x}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

**20** $\dfrac{4x^2+20x}{9+6x+x^2}\div\dfrac{x+5}{x^2-9}$

**21** $\dfrac{x^2}{4}\times\left(\dfrac{xy}{6}\right)^{-1}\times\dfrac{2y^2}{x}$

**22** $2xy\div\dfrac{2x^2}{y}\div\dfrac{2y^2}{x}$

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

**23** $\dfrac{\dfrac{(x+2)^2}{(x+3)^2}}{\dfrac{x+3}{x+2}}$

**24** $\dfrac{\dfrac{x^2-4}{x^2-9}}{\dfrac{(x-2)^2}{(x-3)^2}}$

**25** $\dfrac{\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-6x+5}}{\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-7x+10}}$

**26** $\dfrac{\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}}{\dfrac{x^2+9x+18}{x^2+7x+10}}$

**27** $\dfrac{2x+3}{x-1}\div\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{3x}{2x+3}}$

**28** $\dfrac{\dfrac{x+3}{x-1}}{x(x-1)^{-1}}$

**29** $\dfrac{1-7x^{-1}-18x^{-2}}{1-4x^{-2}}$

**30** $\dfrac{1+12x^{-1}+27x^{-2}}{x^{-1}+9x^{-2}}$

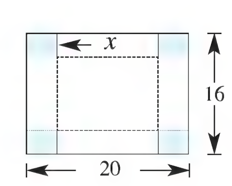
**تحدٍّ**

**31** اكتب مقدارًا نسبيًّا $R$ بحيث تكون درجة كل من بسطه ومقامه 2، ويكون المعامل الرئيس في كل منهما 1، وبحيث يحقّق العلاقة

$$\frac{-10+3x+x^2}{15-8x+x^2}\times R=\frac{x-2}{x-3}.$$

**ربط**

**32** **هندسة** يريد وسيم أن يصنع علبة من الكرتون مفتوحة من الأعلى، باستعمال قطعة مستطيلة من الكرتون طولها 20cm وعرضها 16cm. عليه أن يقصّ عند كل رأس من رؤوس المستطيل مربّعًا صغيرًا ضلعه $x$ cm، وأن يطوي الأطراف الأربعة ويلصقها.




أ بيِّن أن المقدار $x(20-2x)(16-2x)$ يمثِّل حجم العلبة (المفتوحة من الأعلى).

ب بيِّن أن المقدار $320-4x^2$ يمثِّل المساحة الداخلية الكلّية للعلبة.

ج اكتب مقدارًا يبيِّن نسبة حجم العلبة إلى مساحتها الداخلية. اكتب هذا المقدار على أبسط صورة.

د كيف تتغيّر النسبة التي حصلت عليها في السؤال السابق، عندما يتزايد $x$ من صفر إلى 4؟

## تطبيقات

**33** **اقتصاد** يملك سالم مطعمًا صغيرًا لبيع الشطائر. تبلغ الكلفة الشهرية لتشغيله 400 000 دينار. ويبلغ معدّل كلفة الشطيرة الواحدة 4.45 آلاف دينار.




أ استعمل لائحة الأسعار لحساب متوسط سعر مبيع الشطيرة.

ب باع سالم $x$ شطيرة خلال الشهر الماضي. اكتب مقدارًا يبيِّن الكلفة الإجمالية $c$ لتلك الشطائر (كلفة تشغيل المطعم مع كلفة الشطائر).

ج اكتب مقدارًا يبيِّن نسبة ما ربحه سالم من بيع $x$ شطيرة إلى كلفتها الإجمالية.

## نظرة إلى الوراء

**اكتبْ معادلة على صورة المَيل-التقاطع للمستقيم المارّ بالنقطة المعطاة والمتعامد مع المستقيم المعطى.**

**34** $(8, -4)$ ؛ $y=-6x-1$

**35** $(3, 5)$ ؛ $y=\frac{1}{5}x-11$

**اكتبْ كل مقدار كحدودية على صورتها العامة.**

**36** $x^2(x^3-x^2-6x+2)$

**37** $(x-2)(3x^3-6x-x^2)$

**حلّل كل مقدار.**

**38** $8x^2-4x$

**39** $12x^2-3x+6$

**40** $12-4x+22x^2$

**41** $x^3-1$

**42** $125x^3+27$

**43** $x^3-6x^2+8x$



## نظرة إلى الأمام

**اكتبْ كل مقدار على أبسط صورة.**

**44** $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}$

**45** $\frac{3}{x}+\frac{1}{x}$

**46** $\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}$

**47** $\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}$

الدرس 4




## Adding and Subtracting Rational Expressions

**الأهداف**

- يجمع المقادير النسبيّة ويطرحها، ويكتب الناتج على أبسط صورة.




**تطبيقات**
**سفر**

نقلت سيّارة أجرة مسافرًا من المطار إلى المنزل. كان معدَّل سرعتها 55km/h . في طريق العودة إلى المطار، كان معدّل سرعتها 45km/h ، بسبب الازدحام. كم كان معدّل سرعة السيّارة خلال الرحلة كلّها (ذهابًا وإيابًا)؟ ليس الجواب متوسِّط السرعتَيْن كما قد يتبادر إلى ذهنك. لإيجاد الجواب، عليك أن تقوم بجمع مقدارَين نسبيَّين.

جمع مقدارَين نسبيَّين لهما المقام نفسه شبيه بجمع عددَين نسبيَّين لهما المقام نفسه.

**تذكَّرْ**
القيمة الممنوعة هي التي تجعل المقام يُساوي 0.

| الأعداد النسبية | المقادير النسبية |
|---|---|
| $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^2}=\frac{3+5}{x^2}=\frac{8}{x^2}$ |
| المقام المشترك | المقام المشترك |

**مثـــال 1**

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

**الحل**

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}=\frac{2x+5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$

لاحظ أن 3 عدد ممنوع على المتغيِّر $x$ في المقام الأصلي.

**حـاولْ** اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

أ $\frac{3x-1}{2x-1}+\frac{5+2x}{2x-1}$

ب $\frac{2x}{x-5}-\frac{10}{x-5}$

لكي تجمع مقدارين نسبيَّين مختلفَي المقام، عليك أن تبدأ بإيجاد مقام مشترك. **المقام المشترك الأصغر Least Common Denominator (LCD)** لمقدارَين نسبيَّين هو المضاعف المشترك الأصغر لمقامَيهما، إنه الحدودية ذات الدرجة الأقلّ التي تقبل القسمة على كل من المقامَين.

إيجاد المقام المشترك الأصغر لمقدارَين نسبيَّين شبيه بإيجاد المقام المشترك الأصغر لعددَين نسبيَّين. قارنْ استعمال هذه العملية للأعداد النسبيَّة باستعمالها للمقادير النسبيَّة.

**الأعداد النسبيَّة**

$$\frac{7}{300}+\frac{1}{90}=\frac{7}{300}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{90}\times\left(\frac{10}{10}\right)$$

$$=\frac{21+10}{900}=\frac{31}{900}$$

المقام المشترك الأصغر

**المقادير النسبيَّة**

$$\frac{7}{3x^2}+\frac{1}{9x}=\frac{7}{3x^2}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{9x}\times\left(\frac{x}{x}\right)$$

$$=\frac{21+x}{9x^2}$$

المقام المشترك الأصغر

## جمع المقادير النسبيَّة وطرحها

**Adding and Substracting Rational Expressions**

لكي تجمع مقدارَين نسبيَّين أو تطرح أحدهما من الآخر، ابدأ بإيجاد المقام المشترك الأصغر، وأعد كتابة كل من المقدارَيْن باستعمال المقام المشترك الأصغر. بعد ذلك، اجمع أو اطرح، ثم اكتب الناتج على أبسط صورة.

**مثـــــــال** 2 اكتب المقدار $\frac{-8}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}$ على أبسط صورة.

**الحـل**

$$\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x}{x-2}\times\frac{x+2}{x+2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$ المقام المشترك الأصغر هو $(x-2)(x+2)$

$$=\frac{x(x+2)-8}{(x-2)(x+2)}$$ اجمع المقدارَين

$$=\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x+2)}$$ اكتب البسط على الصورة العامة

$$=\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}^{1}}{\cancel{(x-2)}_{1}(x+2)}$$ حلِّل البسط

$$=\frac{x+4}{x+2}$$ بسِّط

**حـــاولْ** اكتب المقدار $\frac{-50}{x^2-25}+\frac{x}{x+5}$ على أبسط صورة.

**نقطة مراقبة √** كيف يساعدك تحليل الحدوديات على جمع مقدارَين نسبيَّيْن أو طرحهما؟ بيِّنْ ذلك عمليًّا عبر كتابة المقدار $\frac{5}{x^2-6x+9}+\frac{x}{x-3}$ على أبسط صورة.

## مثال 3

اكتب المقدار $\frac{6x}{3x-1}-\frac{4x}{2x+5}$ على أبسط صورة.

**الحل**

$$\frac{6x}{3x-1}-\frac{4x}{2x+5}=\frac{6x}{3x-1}\times\left(\frac{2x+5}{2x+5}\right)-\frac{4x}{2x+5}\times\left(\frac{3x-1}{3x-1}\right)$$

المقام المشترك الأصغر هو $(3x-1)(2x+5)$

$$=\frac{6x(2x+5)}{(3x-1)(2x+5)}-\frac{4x(3x-1)}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$=\frac{12x^2+30x}{(3x-1)(2x+5)}-\frac{12x^2-4x}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$=\frac{34x}{(3x-1)(2x+5)}=\frac{34x}{6x^2+13x-5}$$

**نقطة مراقبة √** حدِّد الأعداد الممنوعة على المتغيِّر في المقدار الأصليّ، والأعداد الممنوعة على المتغيِّر في المقدار المبسَّط. هل هي القيم نفسها؟ علِّل ذلك.

**حاوِلْ** اكتب المقدار $\frac{1}{x^2-4}-\frac{6}{x^2-2x}$ على أبسط صورة.

تحتاج في بعض الأحيان أن تعيد كتابة مقادير معقَّدة على صورة مقادير نسبيّة، لكي تتمكَّن من جمعها أو طرحها، كما هو مبيَّن في المثال 4.

## مثال 4

اكتب المقدار $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$ على أبسط صورة.

**الحل**

$$\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}=\frac{1}{\frac{a+1}{a}}+\frac{1}{\frac{a-1}{a}}$$

اجمع أو اطرح داخل كل مقام

$$=1\times\frac{a}{a+1}+1\times\frac{a}{a-1}$$

حوِّل كل مقدار معقَّد إلى مقدار نسبيّ

$$=\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}$$

$$=\frac{a}{a+1}\times\left(\frac{a-1}{a-1}\right)+\frac{a}{a-1}\times\left(\frac{a+1}{a+1}\right)$$

المقام المشترك الأصغر هو $(a+1)(a-1)$

$$=\frac{a^2-a}{(a+1)(a-1)}+\frac{a^2+a}{(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{2a^2}{a^2-1}$$

**حاوِلْ** اكتب المقدار $\frac{a}{a+\frac{1}{a}}-\frac{a}{a-\frac{1}{a}}$ على أبسط صورة.

## مثـــــــال

**5** بالعودة إلى المسألة المطروحة في أول الدرس، ما معدَّل سرعة سيّارة الأجرة خلال الرحلة كلّها (ذهابًا وإيابًا)؟

**الحــل**

ارمز بالمتغيِّر $d$ إلى المسافة بين المطار ومنزل المسافر، ثم ارمز بالمتغيِّر $t_1$ إلى الزمن الذي استغرقته الرحلة من المطار إلى منزل المسافر، وبالمتغيِّر $t_2$ إلى الزمن الذي استغرقته رحلة العودة إلى المطار.

لديك: $d = 55 \times t_1$ ولديك أيضًا $d = 45 \times t_2$.

ينتج من ذلك أن $t_1 = \frac{d}{55}$ و $t_2 = \frac{d}{45}$.

ولكي تحسب معدَّل السرعة الإجماليّ، اقسم المسافة الإجماليَّة $2d$ على الزمن الإجماليّ $(t_1 + t_2)$.




معدَّل السرعة الإجماليّ $= \frac{\text{المسافة الإجماليَّة}}{\text{الزمن الإجماليّ}}$

$= \frac{2d}{t_1 + t_2}$ عوِّض عن $t_1$ وَ $t_2$ كل بقيمته

$= \frac{2d}{\frac{d}{55} + \frac{d}{45}}$

$= \frac{2d}{\frac{9d + 11d}{495}}$ المقام المشترك الأصغر هو 495

$= \frac{2d}{\frac{20d}{495}}$

$= 2d \times \frac{495}{20d}$ اضرب بالمقلوب

$= 49.5$

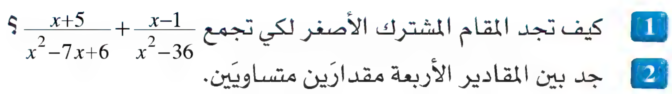
إذًا، معدل سرعة السيارة ذهابًا وإيابًا هو 49.5km/h.

**تفكير ناقد** افترض أن سرعة السيارة في الذهاب كانت $a$ km/h، وأن سرعتها في الإياب كانت $b$ km/h في الساعة. بيِّن أن المعدّل الإجمالي للسرعة ليس $\frac{a+b}{2}$ .

# التمـــــــارين

## التواصل في الرياضيات

**1** كيف تجد المقام المشترك الأصغر لكي تجمع $\frac{x-1}{x^2-36} + \frac{x+5}{x^2-7x+6}$ ؟



**2** جد بين المقادير الأربعة مقدارَين متساويَين.

أ $\frac{3+7}{x^2+4}$

ب $\frac{10}{4} + \frac{10}{x^2}$

ج $\frac{7}{4} + \frac{3}{x^2}$

د $\frac{7}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4}$

## تمارين موجَّهة

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

**3** $\frac{3x}{x-1}+\frac{2}{x-1}$

**4** $\frac{3x+5}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}$

**5** $\frac{12}{x^2-1}+\frac{4}{x+1}$

**6** $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2x+1}{x-1}$

**7** $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$

**8** **سفر** بالعودة إلى المسألة المطروحة في بداية الدرس، احسب المعدَّل الإجماليّ لسرعة سيارة الأجرة إذا كان معدَّل سرعتها في الذهاب 52km/h، ومعدَّل سرعتها في الإياب 38km/h.

## تمارين وتطبيقات

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

**9** $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{6x+5}{x+1}$

**10** $\frac{7x-13}{2x-1}+\frac{x+9}{2x-1}$

**11** $\frac{n+9}{4}+\frac{n-3}{2}$

**12** $\frac{x+7}{3}-\frac{4x+1}{9}$

**13** $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}$

**14** $\frac{2x}{x+3}-\frac{x-3}{x^2+6x+9}$

**15** $\frac{-4}{x-5}+\frac{5}{x+3}$

**16** $\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x-2}$

**17** $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$

**18** $\frac{8}{3x-5}+\frac{7}{2x+3}$

**19** $\frac{2x+3}{x+3}+\frac{x}{x-2}$

**20** $\frac{x+2}{2x-1}-\frac{2x}{x-1}$

**21** $x^2+\frac{2x}{3x-5}$

**22** $\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{x-2}{x-1}$

**23** $2x^2-1-\frac{x-1}{x+2}$

**24** $\frac{3}{\frac{2x-1}{x}}$

**25** $\frac{1}{\frac{3x+1}{2}}$

**26** $\frac{\frac{4}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}+\frac{3}{x-1}$

**27** $\frac{\frac{4}{x+2}}{\frac{x+2}{3}}-\frac{3}{x+2}$

**28** $\frac{\frac{x+2}{x+5}}{\frac{x-1}{x+5}}+\frac{1}{x+1}$

**29** $\frac{\frac{2x+10}{x-1}}{\frac{x+5}{x^2-1}}-\frac{4}{x+1}$

**30** $\frac{1-xy^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$

**31** $\frac{x-y}{x^{-1}-y^{-1}}$

**32** $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}+2(xy)^{-1}+\frac{1}{y^2}}$

حوِّل المقدار إلى مقدار نسبيّ، واكتبه على أبسط صورة.

**33** $\frac{3x}{x-1}+\frac{5x+2}{x-1}-\frac{10}{x-1}$

**34** $\frac{7x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{6}{x^2-1}$

**35** $\frac{7}{x+7}+\frac{-x}{x-7}-\frac{2x}{x^2-49}$

**36** $(x-y)^{-1}-(x+y)^{-1}$

**37** $(x-y)^{-2}-(x+y)^{-2}$

**38** $\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x+y}$

ربط

**39** **هندسة** يبيِّن الشكل المقابل مربّعات، ضلع المربَّع الأول $1cm$ وضلع الثاني $\frac{1}{2}$cm وضلع الثالث $\frac{1}{4}$cm وهكذا...

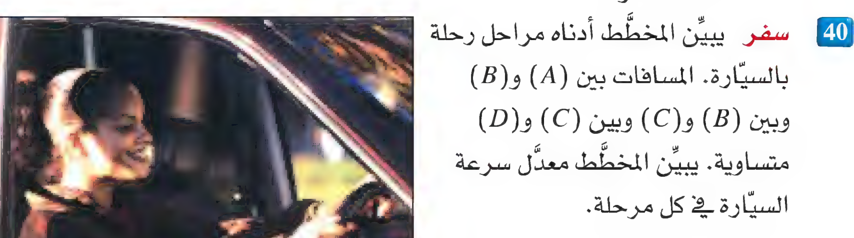
أ اكتب مجموع مساحات المربَّعات $(A)$، $(B)$، $(C)$، $(D)$، مستعملاً قوى العدد 2 فقط.

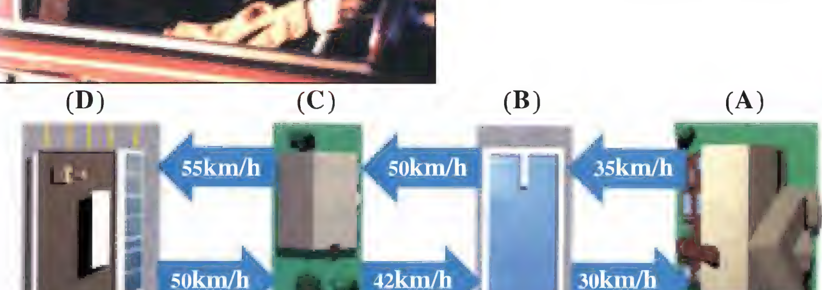
ب اكتب المجموع الذي حصلت عليه كعدد نسبيّ وحيد.

ج تصوّر أن مربَّعين جديدَين، هما $(E)$ وَ $(F)$، قد أضيفا إلى النمط. اكتب مجموع مساحات المرّبعات الستة من $(A)$ إلى $(F)$، على صورة عدد نسبيّ وحيد.

د حوّل جوابَي السؤالَين أ وَ ج إلى أعداد عُشرية من 4 أرقام بعد النقطة العشرية. هل تستطيع أن تخمِّن عددًا يقترب منه مجموع مساحات المربّعات كلّما مضينا في النمط؟ ما هو؟

**40** **سفر** يبيِّن المخطَّط أدناه مراحل رحلة بالسيّارة. المسافات بين $(A)$ و$(B)$ وبين $(B)$ و$(C)$ وبين $(C)$ و$(D)$ متساوية. يبيِّن المخطَّط معدَّل سرعة السيّارة في كل مرحلة.






أ احسب معدَّل السرعة الإجماليّ لرحلة من $(A)$ إلى $(C)$ إلى $(A)$.

ب احسب معدَّل السرعة الإجماليّ لرحلة من $(B)$ إلى $(D)$ إلى $(B)$.

ج احسب معدَّل السرعة الإجماليّ لرحلة من $(A)$ إلى $(D)$ إلى $(A)$.

## نظرة إلى الوراء

**احسب مميِّز المعادلة، وحدِّد عدد الحلول في مجموعة الأعداد الحقيقيّة. حُلّ المعادلة.**

**41** $0=x^2-3x+4$

**42** $x^2-2x+1=0$

**43** $-2x^2-5x+12=0$

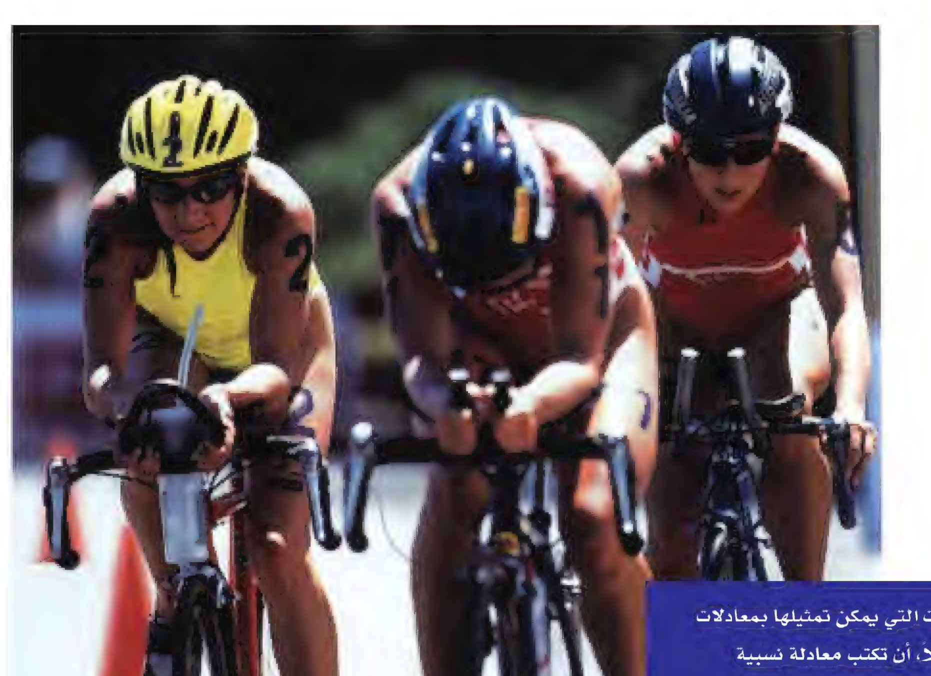
## نظرة إلى الأمام

**44** حدِّد جميع حلول المعادلة  $\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-1}=1.4$. لا تنس أن تستثني الأعداد الممنوعة على $x$ في المقدار النسبيّ.

الدرس 5

# المعادلات والمُتباينات النسبيّة

## Rational Equations and Inequalities



**الأهداف**

- يحلّ معادلات ومُتباينات نسبيّة جبريًّا وبيانيًّا.
- يحلّ مسائل باستعمال معادلات ومُتباينات نسبيّة.

**لماذا**

هناك العديد من الحالات التي يمكن تمثيلها بمعادلات أو مُتباينات نسبية. يمكنك، مثلا، أن تكتب معادلة نسبية لإيجاد معدل السرعة الإجمالي في سباق ثلاثي.

**تطبيقات**
**السباق الثلاثيّ**

أنهى رشيد في ساعتين ونصف سباقًا ثلاثيًّا يتضمَّن السباحة وركوب الدراجة والجري. كان معدَّل سرعته على الدراجة حوالي 6 أضعاف معدَّل سرعته في السباحة. وكان معدَّل سرعته في الجري أكثر من معدَّل سرعته في السباحة بـ 5km/h. يمكنك أن تكتب معادلة نسبيَّة لكي تحسب المعدَّل الإجمالي لسرعة رشيد في السباق الثلاثيّ. **المعادلات النسبيَّة Rational Equations** هي المعادلات التي تتضمَّن مقدارًا نسبيًّا واحدًا على الأقل.

| | المسافة (km) | السرعة (km/h) | الزمن |
|---|---|---|---|
| السباحة | $d_s = 0.5$ | $x$ | $t_s$ |
| ركوب الدراجة | $d_b = 25$ | $6x$ | $t_b$ |
| الجري | $d_r = 6$ | $x+5$ | $t_r$ |

**مثـــــال**



**1 احسب المعدّل الإجمالي لسرعة رشيد.**

**الحـل**

1. احسب الزمن الذي استغرقته كل مرحلة.

**مرحلة السباحة**

المسافة = السرعة × الزمن

$$xt_s = 0.5$$

$$t_s = \frac{0.5}{x}$$

**مرحلة ركوب الدراجة**

المسافة = السرعة × الزمن

$$(6x)t_b = 25$$

$$t_b = \frac{25}{6x}$$

**مرحلة الجري**

المسافة = السرعة × الزمن

$$(5+x)t_r = 6$$

$$t_r = \frac{6}{x+5}$$

2. اكتب مقدارًا نسبيًّا يمثِّل الزمن الإجماليّ الذي استغرقه السباق، بدلالة معدَّل سرعة رشيد في السباحة $x$ .

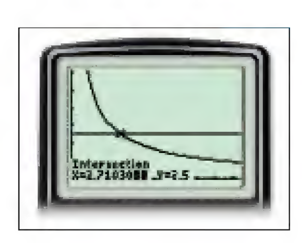
$$T(x)=t_s+t_b+t_r=\frac{0.5}{x}+\frac{25}{6x}+\frac{6}{x+5}$$

$$=\frac{0.5}{x}\times\frac{6(x+5)}{6(x+5)}+\frac{25}{6x}\times\frac{(x+5)}{(x+5)}+\frac{6}{x+5}\times\frac{6x}{6x}$$

$$=\frac{64x+140}{6x(x+5)}$$

المقام المشترك الأصغر هو $6x(x+5)$

3. حُلّ المعادلة $\frac{64x+140}{6x(x+5)}=2.5$ . استعمل الحاسبة البيانيَّة لرسم بيان الدالّة $y=\frac{64x+140}{6x(x+5)}$ والمستقيم $y=2.5$ . حدِّد الإحداثيّ الأول لكل من نقاط التقاطع. كان المعدَّل الإجماليّ لسرعة رشيد 2.7km/h تقريبًا.




**تفكير ناقد** كيف تحلّ المعادلة $\frac{64x+140}{6x(x+5)}=2.5$ باستعمال قانون حل المعادلة التربيعيَّة؟

## مثـــــال 2

حُلّ المعادلة $\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$ .

**الحـل**

### طريقة أولى جبريًّا

$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$ حيث $x\neq 6$ و $x\neq 4$

$$x(x-4)=1\times(x-6)$$

$$x^2-4x=x-6$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$x=2$ أو $x=3$

**تحقَّق**

إذا كان $x=2$ فإن:

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{2}{2-6}=\frac{1}{2-4}$$

$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ **صواب**

إذا كان $x=3$ فإن:

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{3}{3-6}=\frac{1}{3-4}$$

$-1=-1$ **صواب**



إذًا، 2 وَ 3 هما حلاّن للمعادلة.

### طريقة ثانية بيانيًّا

لمّا كان صعبًا أن ترى تقاطع بيان الدالّة $y=\frac{x}{x-6}$ وبيان الدالّة $y=\frac{1}{x-4}$ ، فلا بد أن تستعمل طريقة أخرى. اكتب المعادلة $\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$ على الصورة $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{x-4}=0$ . ارسم بيان الدالّة $y=\frac{x}{x-6}-\frac{1}{x-4}$ ، وحدِّد الإحداثيّ الأول لكل نقطة يقطع فيها هذا الخط المحور الأول.

**حـــاول** حُلّ المعادلة $\frac{x}{3}=\frac{1}{x-2}$ .

يؤدّي حلّ المعادلات النسبيّة، أحيانًا، إلى **حلول دخيلة Extraneous Solutions** لا تحقِّق المعادلة الأصليَّة. من هنا، تأتي ضرورة التحقّق من أن كل حلّ تحصل عليه هو بالفعل حلّ للمعادلة الأصليّة.

## مثـــــــال

**3** حُلَّ المعادلة $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

**الحــل**

### طريقة أولى جبريًّا

اضرب كلاًّ من طرفَي المعادلة بالمقام المشترك الأصغر $(x-3)(x+3)$ أو $x^2-9$.

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9} \quad \text{حيث } x\neq\pm3.$$

$$\frac{x}{x-3}\times(x-3)(x+3)+\frac{2x}{x+3}(x-3)(x+3)=\frac{18}{x^2-9}(x-3)(x+3)$$

$$x(x+3)+2x(x-3)=18$$

$$x^2+3x+2x^2-6x=18$$

$$3x^2-3x-18=0$$

$$3(x^2-x-6)=0$$

$$3(x-3)(x+2)=0$$

$x=3$ أو $x=-2$

**تحقَّق**

بما أن العددين 3 و$-3$ ممنوعان على $x$، فإن الحل $x=3$ حلّ دخيل، ويجب استبعاده.

إذا كان $x=-2$ فإن:

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}\stackrel{?}{=}\frac{18}{x^2-9}$$

$$\frac{-2}{-2-3}+\frac{2(-2)}{-2+3}\stackrel{?}{=}\frac{18}{(-2)^2-9}$$

$$-\frac{18}{5}=-\frac{18}{5} \quad \text{صواب}$$

### طريقة ثانية بيانيًّا

لمّا كان صعبًا أن ترى نقاط تقاطع بياني الدالّتين $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}$ وَ $y=\frac{18}{x^2-9}$، فلا بد من استعمال طريقة أخرى. اكتب المعادلة على الصورة $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=0$. ثم ارسم بيان الدالّة $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}$.




نقطة التقاطع الوحيدة مع المحور الأول هي (−2,0)

للمعادلة إذًا، حلّ وحيد هو $x=-2$ .

**حــاولْ** حُلَّ المعادلة $\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x^2-5x+6}$

**تفكير ناقد** لماذا نتج حلّ دخيل في المثال 3؟ علِّل ذلك.

**المُتباينات النسبيَّة Rational Inequalities** مُتباينات تتضمَّن مقدارًا نسبيًّا واحدًا على الأقلّ.




## حل المُتباينات النسبيَّة Solving Rational Inequalities

تلزمك حاسبة بيانيَّة.

1. ارسم في المستوى الإحداثيّ نفسه بيانَي الدالّتين $y_1 = \frac{x+2}{x-4}$ و $y_2 = 2x-11$.
2. ما قيَم $x$ التي تحقِّق $y_1 = y_2$ ؟ $y_1 < y_2$ ؟ $y_1 > y_2$ ؟
3. كيف تحلّ بيانيًّا المُتباينة $\frac{x+2}{x-4} < 2x-11$ والمُتباينة $\frac{x+2}{x-4} > 2x-11$ ؟




**مثـــال** 4 حُلّ $\frac{x}{2x-1} \le 1$ .

**الحـل**

**طريقة أولى جبريًّا**

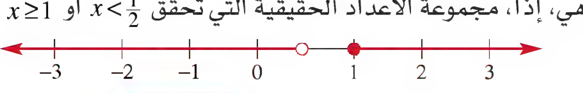
ابدأ بالتخلُّص من المقام بضرب كل من طرفَي المُتباينة بالمقام $2x-1$ . غير أن ضرب طرفَي مُتباينة بعددٍ، قد يبدِّل اتِّجاه المُتباينة. لذا عليك أن تدرس الأمر عندما يكون $2x-1$ موجبًا، وعندما يكون سالبًا.

| | |
|---|---|
| $\frac{x}{2x-1} \le 1$ حيث $2x-1>0$ | $\frac{x}{2x-1} \le 1$ حيث $2x-1<0$ |
| $x \le 2x-1$ | $x \ge 2x-1$ حوِّل $\ge$ إلى $\le$ |
| $-x \le -1$ | $-x \ge -1$ |
| $x \ge 1$ حوِّل $\ge$ إلى $\le$ | $x \le 1$ حوِّل $\ge$ إلى $\le$ |

في هذه الحالة، ولمّا كان $x > \frac{1}{2}$ لأن $2x-1>0$، فإن قيَم $x$ التي تحقِّق المُتباينة ينبغي أن تحقِّق الشرطَين $x > \frac{1}{2}$ وَ $x \ge 1$ معًا. مجموعة الحلّ في هذه الحالة هي مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تحقِّق $x \ge 1$.

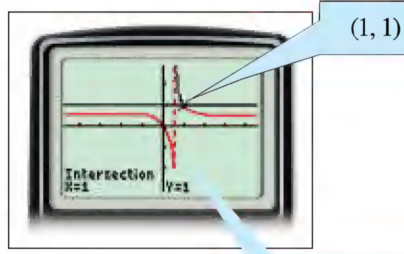
في هذه الحالة، ولما كان $x < \frac{1}{2}$ لأن $2x-1<0$ ، فإن قيَم $x$ التي تحقِّق المُتباينة ينبغي أن تحقِّق الشرطَين $x < \frac{1}{2}$ وَ $x \le 1$ معًا. مجموعة الحلّ في هذه الحالة هي مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تحقِّق $x < \frac{1}{2}$ .

مجموعة الحل هي، إذًا، مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تحقِّق $x < \frac{1}{2}$ أو $x \ge 1$ .




**طريقة ثانية بيانيًّا**

ارسم في المستوى الإحداثيّ نفسه بيانَي الدالّتين $y_1 = \frac{x}{2x-1}$ وَ $y_2 = 1$ ، وحدِّد قيَم $x$ حيث يقع بيان الدالّة الأولى تحت بيان الدالّة الثانية. مجموعة الحل مكوَّنة من قيَم $x$ التي تحقِّق $x < \frac{1}{2}$ أو $x \ge 1$.




**حـــاولْ** حُلَّ $\frac{x-1}{x+2} < 3$ .

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1 ما معنى أن يكون أحد حلول معادلة نسبية دخيلاً؟ وكيف تعرفه؟

2 كيف تستعمل الرسوم البيانيَّة لتتحقَّق من صحَّة الحلول التي حصلت عليها جبريًّا؟

3 كيف تستعمل بيان الدالّة $y_1 = \frac{x-1}{x+2}$ وبيان الدالّة $y_2 = 3$ في الشكل المقابل، وذلك لحلّ المتباينة $\frac{x-1}{x+2} > 3$ ؟

## تمارين موجَّهة

4 رياضة بالعودة إلى المسألة في أول الدرس، احسب سرعة رشيد في كلٍّ من السباحة وركوب الدراجة والجري، لو أنه أنهى السباق في ساعتَين.

حُلّ.

5 $\frac{2x-1}{x} = \frac{3}{x+2}$

6 $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{-4}{x^2-1}$

حُلّ.

7 $\frac{2x-3}{x} \geq 2$

8 $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+3}$

## تمارين وتطبيقات

حُلّ، ثمّ تحقَّق من الحل.

9 $\frac{x+3}{2x} = \frac{5}{8}$

10 $\frac{2y-1}{4y} = \frac{4}{6}$

11 $\frac{4}{n+4} = 1$

12 $\frac{-6}{m-3} = 1$

13 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{8} = \frac{4}{3x}$

14 $\frac{1}{a} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3a}$

15 $\frac{y+3}{y-1} = \frac{y+2}{y-3}$

16 $\frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2n-8}{3n+8}$

17 $\frac{x+3}{x} + 1 = \frac{x+5}{x}$

18 $\frac{2x}{x+3} - 1 = \frac{x}{x+3}$

19 $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x} = \frac{x}{x+1}$

20 $\frac{3}{x+2} - \frac{x}{1} = \frac{4}{3}$

21 $\frac{1}{6} - \frac{1}{x} = \frac{4}{3x^2}$

22 $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{4}$

23 $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$

24 $\frac{x-4}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{17}{x^2-4}$

25 $\frac{a}{a+3} - \frac{a}{a-2} = \frac{10}{a^2+a-6}$

26 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x}{x-6} = \frac{5x^2-15x+20}{x^2-7x+6}$

27 $\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} = \frac{-1}{x-2}$

28 $\frac{x+2}{2x-3} - \frac{x-2}{2x+3} = \frac{21}{4x^2-9}$

**حُلّ، ثمّ تحقَّق من الحل.**

29 $\frac{x+3}{3x}>2$ 30 $\frac{y+5}{4y}>3$ 31 $\frac{x-5}{3x}<-3$

32 $\frac{x-5}{3x}<3$ 33 $\frac{2x+1}{x-2}>4$ 34 $3<\frac{3x+4}{1+2x}$

35 $\frac{x+1}{x}\leq\frac{1}{2}$ 36 $-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{x-4}$ 37 $\frac{7x}{3x+2}<2$

**استعمل حاسبة بيانيّة لحل المُتباينة. قرّب جوابكَ إلى أقرب عُشر.**

38 $x^2<\frac{1}{2}$ 39 $\frac{1}{x}\leq x^2-1$ 40 $\frac{x-2}{x-1}\geq 2x$

**تحــدٍّ**

41 حُلّ ذهنيًّا $0<\frac{3}{(x-1)^2}$.

42 **نافذة على الثقافة الهندية:** طرح عالم الرياضيات الهندي ماهافيرا، في القرن التاسع للميلاد، المسألة التالية: أربعة أنابيب تصبّ الماء في بركة. يملأ أول الأنابيب البركة منفردًا في نصف ساعة، والثاني في ثلث ساعة، والثالث في ربع ساعة، والرابع في خمس ساعة. كم من الزمن يلزم هذه الأنابيب مجتمعة لملء البركة؟ وكم يصبّ كل منها في هذه الحالة؟

**ربــــط**

43 **هندسة** يزيد طول مستطيل 5m على عرضه. حدّد طول المستطيل وعرضه إذا كانت نسبة طوله إلى عرضه لا تقلّ عن 1.5 ولا تزيد على 3.

**تطبيــــقات**

44 **رياضة** اشترك منير في السباق الثلاثي. سبح مسافة 0.6km وركب الدراجة مسافة15km، وركض مسافة 8km. كان معدَّل سرعته على الدراجة 9 أضعاف معدَّل سرعته في السباحة. وزاد معدَّل سرعته في الجري 6km/h على معدَّل سرعته في السباحة.

أ اكتب دالّة نسبيَّة، بدلالة معدَّل سرعته في السباحة، تمثِّل الزمن الذي قضاه منير للقيام بهذا السباق.

ب كم كان معدّل سرعة منير في السباحة وفي الجري وعلى الدراجة، علمًا بأن إنهاء هذا السباق تطلّب منه ساعة ونصفًا؟

45 **فيزياء** تمثِّل الدالّة $w(h)=w_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$ وزن جسم على ارتفاع $h$ km في الفضاء، حيث يمثّل $w_0$ وزن هذا الجسم على سطح الأرض. احسب ارتفاع قمر اصطناعي يبلغ وزنه 1200kg في الفضاء، وَ3500kg على الأرض.

## نظرة إلى الوراء

**احسبْ قيمة كل مقدار.**

46 $81^{\frac{1}{2}}$ 47 $13^0$ 48 $9^{\frac{3}{2}}$ 49 $27^{\frac{1}{3}}$

## نظرة إلى الأمام

50 استعمل الحاسبة البيانيَّة لرسم بيان الدالّة $f(x)=\sqrt{x}$. أنشئ صورة هذا البيان بانعكاس حول المحور الأول. ماذا تلاحظ؟




# الدوال الجذرية Radical Functions

**الأهداف**

- يميِّز دالّة الجذر التربيعيّ وبيانها.
- يحسب قيمة مقدار جذريّ.

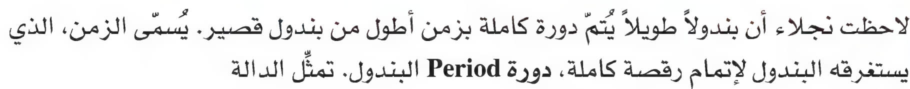


**لماذا؟**

تُستعمل دالّة الجذر التربيعي لتمثيل العديد من العلاقات في الحياة اليومية. ومنها العلاقة التي تربط بين طول بندول والزمن الذي يستغرقه للقيام برقصة كاملة.

**تطبيقات**
**فيزياء**

لاحظت نجلاء أن بندولاً طويلاً يُتِمّ دورة كاملة بزمن أطول من بندول قصير. يُسمّى الزمن، الذي يستغرقه البندول لإتمام رقصة كاملة، **دورة Period** البندول. تمثِّل الدالة



$t(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ دورة البندول (بالثواني) بدلالة طوله (بالأمتار).

ما دورة بندول طوله $0.1m$ ، $0.2m$ ، $0.3m$؟

## دالّة الجذر التربيعيّ Square - Root Function

تذكَّر أن الجذر التربيعيّ للعدد $x$ هو عدد إذا ضربته في نفسه حصلت على العدد $x$. تذكَّر أيضًا أن الأعداد السالبة لا جذر تربيعيًّا لها في مجموعة الأعداد الحقيقيّة. أخيرًا تذكَّر أن لكل عدد موجب $x$ جذرَين تربيعيَّين أحدهما موجب ويُكتب $\sqrt{x}$ ، والثاني سالب ويُكتب $-\sqrt{x}$.

دالّة **الجذر التربيعي** هي الدالّة المُعرّفة بالمعادلة $f(x)=\sqrt{x}$ . بالاستناد إلى ما سبق، يمكن القول إن مجال هذه الدالّة هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة غير السالبة، ومداها هو هذه المجموعة أيضًا.

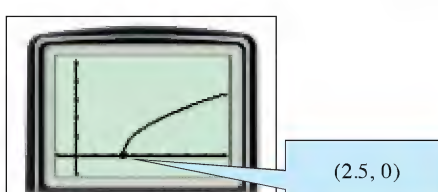
أما بيانها، فهو الرسم المبيَّن في الشكل المقابل.

**مثـــــال** 1 حدِّد مجال الدالّة $f(x)=\sqrt{2x-5}$ .

الحــل

يتكوَّن مجال هذه الدالّة من جميع الأعداد الحقيقيّة $x$ التي تجعل قيمة المقدار $2x-5$ عددًا غير سالب. لكي تحدِّد هذا المجال، ما عليك إلا أن تحلّ المُتباينة $2x-5\geq 0$ .

$$2x-5\geq 0$$
$$x\geq \frac{5}{2}=2.5$$



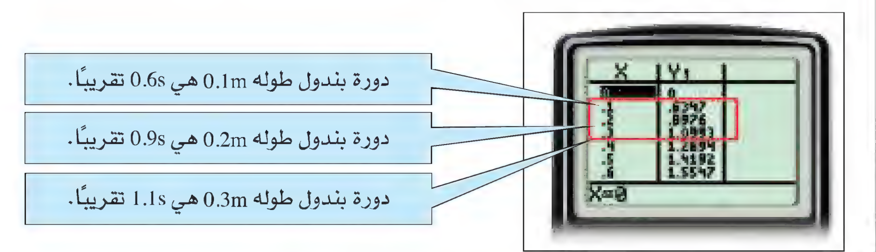

**تحقَّق**

مجال الدالّة $f(x)=\sqrt{2x-5}$ هو $x\geq\frac{5}{2}$.

**مثـــــال** 2 **بالعودة إلى مسألة البندول في أول الدرس، احسبْ دورة بندول طوله 0.1m، 0.2m، 0.3m.**

الحــل

أدخلِ الدالّة $y=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ إلى الحاسبة البيانيَّة، واستعمل وظيفة الجدولة.




## تبسيط المقادير الجذريَّة Symplifiying Radical Expressions

**المقادير الجذريَّة Radical Expressions** هي المقادير التي تتضمَّن مقدارًا واحدًا على الأقلّ يقع تحت إشارة الجذر التربيعيّ.

**مثـــــال** 3 اكتب المقدار الجذريّ $\sqrt{49a^2b^5x^6}$ على أبسط صورة.

تذكّر أن
$\sqrt{b^2}=|b|$

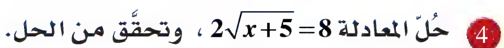
الحــل

$$\sqrt{49a^2b^5x^6}=\sqrt{7^2a^2b^5x^6}=7|a|b^2|x^3|\sqrt{b}$$

**حـــاولْ** اكتب المقدار الجذريّ $\sqrt{64a^4bx^3}$ على أبسط صورة.

## المعادلات الجذريَّة Radical Equations

**مثـــــال** 4 حُلّ المعادلة $2\sqrt{x+5}=8$ ، وتحقَّق من الحل.





الحــل

$$2\sqrt{x+5}=8$$
$$\sqrt{x+5}=4$$
$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2=4^2 \quad \text{خذ تربيع كلٍّ من طرفَي المعادلة}$$
$$x+5=16$$
$$x=11$$

**تحقَّق**

$$2\sqrt{x+5}=8$$
$$2\sqrt{11+5}=8$$
$$2\times4=8 \quad \text{صواب}$$

**حــاولْ** حُلّ المعادلة $3\sqrt{2x-1}=6$ .

قد ينتج من حلّ بعض المعادلات الجذرية حلول دخيلة. لذا، عليك دائمًا أن تتحقَّق ممّا حصلت عليه لكي تستبعد مثل تلك الحلول.

## مثـــــال 5

**حُلّ المعادلة $\sqrt{x+1}+3=2x$ ، وتحقَّق من الحل.**

**الحــل**

$$\sqrt{x+1}+3=2x$$

اعزل الجذر في أحد الطرفَين
$$\sqrt{x+1}=2x-3$$

خذ تربيع كلٍّ من طرفَي المعادلة
$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(2x-3)^2$$

$$x+1=4x^2-12x+9$$

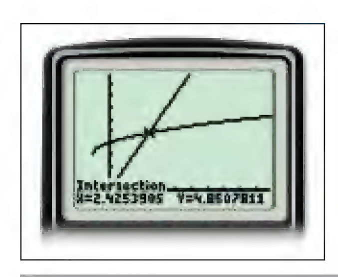
اكتب المعادلة التربيعية على الصورة العامة
$$4x^2-13x+8=0$$

استعمل قانون حل المعادلة التربيعية
$$x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{13^2-4\times4}}{2\times4}$$

$$x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx2.43 \quad \text{أو} \quad x=\frac{13-\sqrt{41}}{8}\approx0.82$$

**تحقَّق**

ارسم بيان كل من الدالّة $y=\sqrt{x+1}+3$ والدالّة $y=2x$ ، وابحث عن الإحداثيّ الأول لنقاط التقاطع. هناك نقطة تقاطع واحدة إحداثيُّها الأول $x\approx2.43$ .
للمعادلة إذًا، حل وحيد هو $x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx2.43$ .
أما الحل الآخر الذي وجدته جبريًّا، فهو حل دخيل.




**حــاولْ** حُلّ المعادلة $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}-1$، وتحقَّق من الحل.

بعض المعادلات الجذريَّة ليس لها حلول، كما يبيِّن ذلك المثال التالي.

## مثـــــال 6

**حُلّ المعادلة $\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$، وتحقَّق من الحل.**

**الحــل**

$$\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$$

خذ تربيع كلٍّ من طرفَي المعادلة
$$\left(\sqrt{x}-1\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$$

$$x-2\sqrt{x}+1=2x+1$$

بسِّط
$$-2\sqrt{x}=x$$

خذ تربيع كلٍّ من طرفَي المعادلة
$$\left(-2\sqrt{x}\right)^2=(x)^2$$

$$4x=x^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$x = 0$ أو $x = 4$

**تحقَّق**

$\sqrt{0} - 1 \stackrel{?}{=} \sqrt{2 \times 0 + 1}$ $\qquad$ $\sqrt{4} - 1 \stackrel{?}{=} \sqrt{2 \times 4 + 1}$

$-1 = 1$ **خطأ** $\qquad$ $1 = 3$ **خطأ**

يمكنك أيضًا أن تتحقَّق من الأمر بيانيًّا. أنشئ بيان الدالّة $y = \sqrt{x} - 1$ وبيان الدالّة $y = \sqrt{2x+1}$، وتحقَّق من أنهما لا يتقاطعان.

**حـــاولْ** حُلّ $3\sqrt{x} + 2 = \sqrt{3x}$ ، وتحقَّق من الحلّ.

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1. كيف تكتب المقدار الجذري $\sqrt{4x^3}$ على أبسط صورة؟
2. اشرح طريقتَيْن لحلّ معادلة جذريَّة، مثل $\sqrt{x} = 3\sqrt{x-4}$ .
3. لماذا يجب أن تتحقَّق من الحلول التي تحصل عليها جبريًّا عندما تحلّ معادلة جذريّة؟
4. كيف تبيِّن أن لا حلول للمعادلة $\sqrt{x} = \sqrt{x+1}$ جبريًّا وبيانيًّا؟

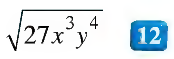
## تمارين موجَّهة

5. اكتب المقدار $\sqrt{128ab^2x^5}$ على أبسط صورة.
6. اكتب المقدار $\frac{12\sqrt{15x^3}}{(3x)^{\frac{1}{2}}}$ على أبسط صورة مفترضًا أن قيم $x$ موجبة.
7. حُلّ المعادلة $3\sqrt{2x-5} = 20$ ، وتحقَّق من الحلّ.
8. حُلّ المعادلة $\sqrt{5x+7} - 2 = x$، وتحقَّق من الحلّ.
9. حُلّ المعادلة $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x} - 3$ ، وتحقَّق من الحلّ.

## تمارين وتطبيقات

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

10. $\sqrt{32x^3}$
11. $\sqrt{18x^3}$
12. $\sqrt{27x^3y^4}$



13. $\sqrt{50a^3b^4}$
14. $\left(16x^6\right)^{\frac{1}{4}}$
15. $\left(40a^7\right)^{\frac{1}{3}}$
16. $\frac{x}{3-5\sqrt{5}} - \left(2+3\sqrt{2}\right)$
17. $\frac{x}{4+\sqrt{3}} - \left(-1+3\sqrt{2}\right)$

**حدِّد مجال كل دالّة.**

18 $f(x)=\sqrt{12x+24}$    19 $f(x)=\sqrt{3x-2}$

20 $f(x)=\sqrt{3(x-2)}$    21 $f(x)=\sqrt{3(x+2)-1}$

22 $f(x)=\sqrt{2-3(x+1)}$    23 $f(x)=\sqrt{3-2(x-4)}$

24 $f(x)=\sqrt{x^2-25}$    25 $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$

26 $f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$    27 $f(x)=\sqrt{x^2+10x-25}$

28 $f(x)=\sqrt{2x^2+5x-12}$    29 $f(x)=\sqrt{3x^2+7x+2}$

30 $f(x)=\sqrt{6x^2-13x+5}$    31 $f(x)=\sqrt{8x^2-10x-3}$

32 حدِّد مجال الدالّة $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$. ارسم بيانها لكي تتحقَّق من جوابك.

**تطبيقات**

33 **حوادث السير** يستعمل المحقِّقون في حوادث السير دالّة تفيدهم عن سرعة السيارة وقت الحادث، بقياس طول أثر عجلة السيارة على الطريق، جرّاء الضغط على المكابح. هذه الدالّة هي في أيام الصحو $y=\sqrt{80x}$، حيث يرمز $y$ إلى سرعة السيارة بالكيلومتر في الساعة، وَ $x$ إلى طول الأثر بالأمتار.

أ اكتب الدالّة السابقة على أبسط صورة، مستعملاً الجذر التربيعيّ. ثم اكتبها مستعملاً الأعداد العُشريَّة.

ب قاس المحقِّق طول أثر العجلة ووجد أنه يبلغ 200m. احسب سرعة السيّارة مقرَّبة إلى أقرب كيلومتر في الساعة.

ج هل تتضاعف السرعة إذا تضاعف طول الأثر؟ علِّل جوابك.

## نظرة إلى الوراء

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة مفترضًا أن الصفر قيمة ممنوعة على جميع المتغيِّرات.**

34 $\left(-2y^3y^5\right)^2$    35 $2x^4\left(-3xy^2\right)^3$    36 $\left(5x^{-2}y^4\right)^{-1}$

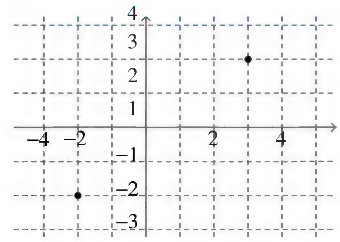
37 $\left(\frac{-3xy^3}{x^{-4}y^5}\right)^3$    38 $\left(\frac{-4m^4n^{-2}}{m^2n^{-2}}\right)^{-1}$    39 $\left(\frac{3m^4n^2}{2m^0n^{-3}}\right)^{-2}$

**حدِّد أصفار كلّ دالّة.**

40 $f(x)=x^2+9x+18$    41 $f(x)=x^2-2x-8$    42 $f(x)=x^2-3x-18$

## نظرة إلى الأمام

43 استعمل نظرية فيثاغورس لحساب المسافة بين النقطتَين في الشكل المقابل.



مشروع الفصل

# أيّ متوسِّط تختار؟



يستعمل الإحصائيّون، إلى جانب المتوسط الحسابي، المتوسط التوافقي. المتوسِّط الحسابي للعددين $a$ وَ $b$ هو $\frac{a+b}{2}$. أما المتوسِّط التوافقي للعددين $a$ وَ $b$ فهو $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.
نعتمد المتوسِّط الحسابي في حل بعض المسائل ونعتمد المتوسِّط التوافقي في حل بعضها الآخر.
يمثّل اعتماد أحد هذين المتوسِّطين أمرًا مفصليًّا، لأن النتائج في كل من الحالتين قد تكون مختلفة تمامًا.
بهدف تزويد الناس بمعيار يسمح بمقارنة التوفير في استهلاك الوقود للسيارات الجديدة، تفرض وكالة حماية البيئة أن يتم إلصاق إعلان على نوافذ السيّارات يبيِّن استهلاكها للوقود.

مثلاً: تقدِّر الوكالة أن سيّارة من 4 سرعات ومحرِّك سعته 1.9L تستهلك جالونًا واحدًا كل 39km في المدينة وجالونًا واحدًا كل 54km على الطريق السريعة.

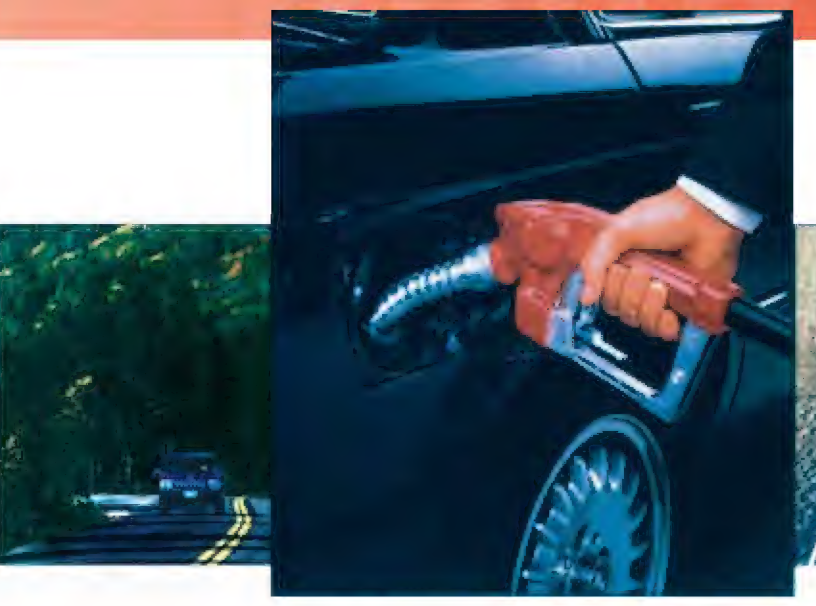
تنشر وزارة الطاقة في بعض الدول دليلاً سنويًّا يساعد الراغبين في شراء سيارة جديدة. يتضمَّن هذا الدليل تقديرًا لاستهلاك كل نوع من السيّارات الجديدة، محدِّدًا المسافة التي تقطعها السيّارة باستهلاك جالون واحد. ويتضمّن الدليل تحذيرًا للمستهلك:

> ***تحذير لمالكي السيارات***
>
> *الرجاء الانتباه إلى أن المتوسِّطات التي تدلّ على استهلاك السيّارات داخل المدن أو على الطرقات السريعة ما هي إلا تقديرات قد تقود إلى تقدير خاطئ للاستهلاك السنوي للسيّارة.*




## النشاط 1

1. احسب المتوسِّط الحسابيّ لاستهلاك السيّارة المبيَّنة في الصورة أعلاه في مجمل سَيرها.
2. احسب المتوسِّط التوافقيّ لاستهلاك السيّارة المبيَّنة في الصورة أعلاه في مجمل سَيرها.
3. تفحّص كلاًّ من المتوسِّطَين، وعلِّل التحذير الوارد في الدليل.





## النشــاط 2

قد لا يتساوى عدد الكيلومترات التي تجتازها سيّارة داخل المدن مع عدد الكيلومترات التي تجتازها على الطرقات السريعة. هذا الأمر يفرض حساب المتوسِّط السنوي المثقَّل لإعطاء فكرة عن استهلاكها السنوي. ارمز بالمتغيِّر $d_1$، لعدد الكيلومترات داخل المدن، وبالمتغيِّر $d_2$ لعددها على الطريق السريعة، خلال عام.

لحساب عدد الجالونات المُستهلَكة خلال هذا العام، نقوم بالحسابات التالية:

داخل المدن: $(d_1 \text{ km})\left(\frac{\text{gal}}{39 \text{ km}}\right) = \frac{d_1}{39} \text{ gal}$

على الطريق السريعة: $(d_2 \text{ km})\left(\frac{\text{gal}}{54 \text{ km}}\right) = \frac{d_2}{54} \text{ gal}$

يمكن التعبير عن الاستهلاك السنويّ للسيّارة بواسطة مقدار نسبي كما يلي:

متوسِّط الاستهلاك السنوي

$$a(d) = \frac{\text{عدد الكيلومترات السنوي}}{\text{عدد الجالونات السنوي}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{39} + \frac{d_2}{54}}$$

1 افترض أنك اشتريت السيّارة الموصوفة أعلاه. ما متوسِّط استهلاكها السنوي للوقود، إذا قطعت 8000km في المدن، وَ 4000km على الطرقات السريعة؟

2 احسب كلفة وقود السيارة سنويًّا، إذا كان ثمن جالون الوقود 7 آلاف دينار.

## النشــاط 3

قطع آمانج بدراجته 2km. كانت سرعته 20km/h خلال الكيلومتر الأول، وَ 10km/h خلال الكيلومتر الثاني، بسبب التعب.

1 هل يعبِّر المتوسِّط الحسابي للسرعتَيْن عن متوسِّط سرعة آمانج على مدى الكيلومترَيْن؟ علِّل جوابك.

2 احسب السرعة التي ينبغي لآمانج أن يسير بها خلال الكيلومتر الثاني، لكي يكون متوسِّط سرعته على مدى الكيلومترَيْن 15km/h.



# مــــراجعـــــة

1 يرتبط المتغيِّر $m$ بعلاقة تغيُّر طرديّ مع المتغيِّر $a$، وبعلاقة تغيُّر عكسيّ مع المتغيِّر $b$. ما قيمة $m$ عندما $a=7$ علمًا بأن $m=6$ عندما $a=9$ وَ $b=12$، وَ $b=4$؟

2 يرتبط المتغيِّر $y$ بعلاقة تغيُّر طرديّ مع المتغيِّر $x$، وبعلاقة تغيُّر عكسيّ مع المتغيِّر $z$. ما قيمة $y$ عندما $x=18$ علمًا بأن $y=3$ عندما $x=20$ وَ $z=2$، وَ $z=2$؟

**حدِّد مجال كل دالّة ومحاذياتها.**

3 $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-8x+12}$

4 $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-25}$

5 $f(x)=\frac{x^2+4x-12}{3x^2-12}$

6 $f(x)=\frac{x^2-9}{3x+5}$

7 $f(x)=\frac{2x}{6x^4-18x^3}$

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

8 $\frac{x^2+6x}{10}\times\frac{4}{x^2-36}$

9 $\frac{3x^2+10x-8}{3x^2-17x+10}\times\frac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-4}$

10 $\frac{4x+8}{5x-20}\div\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x}$

11 $\frac{2x^2-9}{6}\div\frac{4x-12}{x}$

12 $\dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+2}{x}}$

13 $\dfrac{\frac{a+1}{a^2}}{\frac{(a-1)^2}{a}}$

14 $\dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x+2}}$

15 $\dfrac{\frac{4x^2}{6x-3}}{\frac{15x}{2x-1}}$

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

16 $\frac{3x-5}{3x-6}+\frac{4x-2}{5x-15}$

17 $\frac{9y+3}{y^2-11y+18}+\frac{y+3}{y-9}$

18 $\frac{2x-3}{x^2-3x}-\frac{9x+1}{x-3}$

19 $\frac{3y-39}{y^2-7y+10}-\frac{3}{y-2}$

20 $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x}}{\ }$ → $\frac{\frac{2}{x}}{4}+\frac{\frac{5}{x}}{3}$

21 $\frac{x}{3+\frac{5}{x}}-\frac{4}{1+\frac{2}{x}}$

**حُلّ كل معادلة.**

22 $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$

23 $\frac{4}{x^2+1}=1$

24 $\frac{3x-1}{x^2+2x}=-1$

25 $\frac{1}{x^2-1}=1$

26 $\frac{2}{1-x^2}=\frac{x^2}{x^2+1}$

27 $\frac{1}{x}=\frac{x+2}{x+1}$

28 $\sqrt{x+2}=-2$

29 $\sqrt{x}=2x$

30 $\sqrt{x-2}=\sqrt{x}-2$

**حُلّ جبريًا كل مُتباينة.**

31 $\frac{1}{x}<1$

32 $\frac{1}{x}\geq 2$

33 $\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{2}$

34 $\frac{1}{x^2+1}\geq\frac{1}{3}$

35 $\frac{x+1}{2x+3}<1$

36 $\frac{2x+1}{2x-1}<2$

**حُلّ بيانيًا كل مُتباينة.**

37 $\frac{1}{x}\geq x$

38 $\frac{1}{x^2+2x+1}>2$

39 $\frac{1}{x}<2x$

40 $\frac{1}{x^2-x+2}<x$

**حدِّدْ مجال كل دالّة.**

41 $f(x)=\sqrt{2x-3}$

42 $f(x)=\sqrt{x}-5$

43 $f(x)=5\sqrt{3(x-1)}+1$

# 5 اختبار الفصل

حدِّد جميع الأعداد الممنوعة، وجميع المحاذيات، لكل دالّة.

**1** $f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}$

**2** $h(x)=\frac{x^2+2x-15}{2x^2-18}$

**3** $g(x)=\frac{2x^3-16}{x^3-2x^2-9x+18}$

**4** **بناء** تتغيَّر قدرة عمود على الحمل طرديًا مع عرضه وعكسًا مع تكعيب ارتفاعه. يحمل عمود عرضه 10mm وارتفاعه 20mm وزنًا قدره 1200kg. كم يحمل عمود عرضه 8mm وارتفاعه 25mm؟

اكتب كل مقدار على أبسط صورة.

**5** $\frac{x^2-9}{2x^2-8x+6} \times \frac{4x^2-12x+36}{x^3+27}$

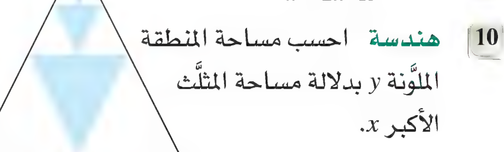
**6** $\dfrac{\frac{x^3}{3x^2-12}}{\frac{x^3+5x^2}{3x^2+9x-30}}$

**7** $\frac{3x}{x-2} \div \frac{6x^2}{2x^2-8} \times \frac{5x+1}{2x+4}$

**8** $\frac{4}{x^2-4}+\frac{x+3}{x+2}$

**9** $\frac{x-37}{x^2-2x-15}-\frac{5}{x+3}$

**10** **هندسة** احسب مساحة المنطقة الملوَّنة $y$ بدلالة مساحة المثلَّث الأكبر $x$.



حُلّ كل معادلة أو مُتباينة.

**11** $\frac{x+3}{x-1}=2$

**12** $\frac{a-4}{a+2}+\frac{a-5}{a-4}=1$

**13** $\frac{3}{x+4}\le 5$

**14** $\frac{3}{x+4}<\frac{5}{x+7}$

حدِّد التحويل الهندسيّ الذي يسمح بالانتقال من بيان الدالّة الأمّ $y=\sqrt{x}$ إلى بيان الدالّة.

**15** $y=\sqrt{x-4}$

**16** $y=\sqrt{x}+3$

احسب $x$ بدلالة $y$.

**17** $y=x^2+x$

**18** $y=5x^2-3x-4$

احسب قيمة كل مقدار.

**19** $\left(3\sqrt[4]{81}\right)^2-31$

**20** $\frac{1}{5}\left[\left(\sqrt{9}\right)^3-\left(\sqrt[3]{64}\right)^2+2\right]$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة معتبرًا أن كل متغيِّر لا يتَّخذ إلا قيَمًا موجبة.

**21** $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$

**22** $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5a}}$

**23** $\left(5-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{27}+8\right)$

**24** $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$

اكتب كل مقدار على أبسط صورة منسَّبًا المقام.

**25** $\frac{4}{\sqrt{11}}$

**26** $\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

**27** $\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{35}}{\sqrt{35}}$

حُلّ كل معادلة أو مُتباينة.

**28** $\sqrt{2x+7}=-3$

**29** $\sqrt[4]{3x}=\sqrt[4]{4x-7}$

**30** $\sqrt{x-7}<0$

**31** $\sqrt[3]{2x+1}\ge 3$

5

# اختبار تراكمي

1 أيٌّ ممّا يلي ليس صحيحًا حكمًا، إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$؟

أ $ad=bc$  ج $ad=cb$

ب $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$  د $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

2 اكتب $\left(6\sqrt{8}-6\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)$ على أبسط صورة.

أ $6\sqrt{2}-24$  ج $6\sqrt{2}+24$

ب $12\sqrt{2}-23$  د $6\sqrt{2}-23$

3 ما عدد حلول النظام $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x-2 \end{cases}$؟

أ 0  ج 1

ب 2  د غير محدود

4 ما باقي قسمة $2x^2-5x+8$ على $x+4$؟

أ 60  ج $-44$

ب 0  د 20

5 اكتب $(x^3y^{-2})^{-2}$ على أبسط صورة.

أ $\frac{y^4}{x^6}$  ج $\frac{1}{x^2y}$

ب $\frac{x^6}{y^4}$  د $x^2y$

6 أيٌّ ممّا يلي ليس جذرًا للمعادلة $x^3+x^2-9x-9=0$؟

أ $-3$  ج $-1$

ب 3  د 1

7 أيُّ عدد ينبغي إضافته إلى $x^2-10x$ للحصول على مربَّع كامل؟

أ 5  ج $-25$

ب $-5$  د 25

8 اكتب معادلة للمستقيم المارّ بالنقطتَيْن $(-3, 8)$ وَ $(-4, 9)$.

9 حلِّل المقدار $25x^2-60x+36$.

10 اكتب $\frac{x^3+2x^2}{x^2+4} \div \frac{x+1}{x^2-4x+4}$ على أبسط صورة.

11 اكتب $\frac{8}{5-3\sqrt{2}}$ على أبسط صورة بعد تنسيب المقام.

12 **القيَم القصوى** بمناسبة عيد نوروز، أطلقت بلدية إحدى المدن أسهمًا نارية بسرعة أصلية تبلغ 75m/s. احسب أعلى ارتفاع بلغه أحد هذه الأسهم، والزمن الذي استغرقه، علمًا بأن الدالّة $h(t)=75t-4.8t^2$، تمثّل ارتفاع السهم (بالأمتار) بدلالة الوقت $t$ (بالثواني).

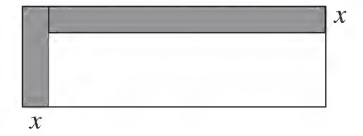
13 ما أكبر عدد صحيح يحقِّق $-6x-1>10$؟

14 حُلّ $2\sqrt{x-4}=\sqrt{x-2}$.

15 حُلّ $1-2x=5$.

16 حُلّ $-5x+3=\frac{1}{2}x-1$.

17 **تسلية** يبلغ طول خشبة المسرح 38m وعرضها 20m. تم اقتطاع قسم من الخشبة، كما هو مبيَّن في الشكل أدناه. ما قيمة $x$ علمًا بأن الاقتطاع أنقص مساحة خشبة المسرح 265 مربَّعًا؟



GRADE10-CHAP6-13-final 5/10/13 1:42 PM Page 223

## الفصل السادس

# الاحتمال والإحصاء




# الاحتمال والإحصاء

## Probability and Statistics

يشير احتمال الحدث إلى إمكانيّة وقوعه، أو تحقُّقه. وفي حين أن هناك أحداثًا يكونُ احتمالُ وقوعها صغيرًا أو مستحيلاً، نجد أحداثًا يكونُ احتمالُ وقوعها كبيرًا أو مؤكّدًا. سوف تستعمل في هذا الفصل قانون العد الأساسيّ لتحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة عشوائية، أو النتائج التي تُعبِّر عن وقوع حدث ما.

لحساب الاحتمالات استعمالات كثيرة، تجدها لدى شركات التأمين، ومؤسسات الأبحاث كالبحث الطبّي وسواه، وفي تطبيق القوانين، وفي العلوم السياسية.

الدروس



## حول مشروع الفصل

يؤدّي التوقُّع المعقول لنتائج الأحداث العشوائيَّة، دورًا مهمًّا في اتِّخاذ القرارات، بسيطة كانت أو مُعقَّدة. في العديد من الحالات، يُمكن أن يُحدَّد احتمال وقوع حدث عشوائيٍّ، بطريقةٍ تجريبيَّة، عبر مراقبة عدد المرّات التي يتحقَّق فيها الحدث. لكن قد يكون ذلك شبه مستحيل ،عندما يكون الحدث مُعقّدًا. في هذه الحالات، يلجأ الإنسان إلى المحاكاة. سوف تستعمل هذه الطريقة، خلال اشتغالك بمشروع الفصل. بعد الانتهاء من هذا المشروع، يصبح بإمكانك القيام بما يلي:

- إنشاء نماذج لمحاكاة أحداث عشوائية.
- استعمال المعطيات التي توفِّرها المحاكاة، لتقدير احتمال حدث.




# مدخل إلى الاحتمال

## Indroduction To Probability

**لماذا**

غالبًا ما تتم دراسة الاحتمال باستعمال أشياء من الحياة مثل مكعّب الأعداد أو السهم أو قطعة النقود.



**الأهداف**

- يستعمل المُفردات الخاصّة بالاحتمال.
- يستعمل المبدأ الأساسي للعد.
- يتعرَّف التساوي في الاحتمال.
- يُحدِّد الاحتمال النظريّ لحدث.

ترتبط أعمال الشركات التجارية، ومنها شركات التأمين، بأمور تبدو صعبة التوقّع. من حقّنا أن نسأل: كيف تتمكَّن هذه الشركات من تحقيق الأرباح؟ يمكنها، في الواقع، تحديد احتمال وقوع أمر ما من خلال مراقبة النتائج لحالات كثيرة قد تؤدّي إلى وقوعه. يمكن، مثلاً، تحديد احتمال وفاة مُدخّن بمراقبة نسبة الذين يموتون جرّاء التدخين، وهي نسبة عالية كما أثبتت الأبحاث الطبّية.

تستعمل دراسة الاحتمال مجموعة من المفردات، لا بد للدارس أن يتعلَّمها ويتعلَّم استعمالها بشكل صحيح. يُبيِّن الجدول التالي، تعريفات لبعض المفردات موضَّحة بمثال رمي مكعَّب الأعداد.

| التعريف | مثال |
|---|---|
| **الفعل العشوائي Trial** فعل يؤدّي إلى نتيجة غير معروفة سلفًا. | رمي مكعَّب الأعداد. |
| **التجربة (العشوائية) Experiment** فعل عشوائي أو تكرار فعل عشوائيّ عدَّة مرّات. | رمي مكعَّب الأعداد 10 مرّات. |
| **مجموعة النتائج (فضاء العينة) Sample Space** المجموعة المؤلَّفة من جميع النتائج المكنة لفعل عشوائي. | $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ |
| **الحدث Event** نتيجة ممكنة<br>أو<br>مجموعة من النتائج المكنة. | الحصول على 3<br>أو<br>الحصول على عدد مفرد. |

تقول عن نتائج فعل عشوائيّ إنها **متساوية الاحتمال Equiprobable** إذا تساوت إمكانيات جميع هذه النتائج في الظهور. في الواقع، تصعب البرهنة على أن جميع نتائج فعل عشوائي، من واقع الحياة، متساوية الاحتمال. لكن يمكننا الافتراض أنها كذلك. يمكنك، مثلاً، أن تعتبر نتائج كلّ من الأفعال العشوائية التالية متساوية الاحتمال: رمي مكعَّب الأعداد، رمي قطعة نقود معدنيَّة، نتائج الدولاب المؤشِّر، جنس المولود.

**مثـــــال** 1

**ما احتمال أن يشفى أحد المصابين بسرطان الرئة، علمًا بأن دراسة، أجريت على 5000 حالة، بيَّنت أن 250 منها تماثلت للشفاء؟**

الحـــل

يمكنك اعتبار مجموعة النتائج مكوّنة من 5000 حالة، بينها $5000 - 250 = 4750$ تمثِّل عدم الشفاء، و 250 تمثِّل الشفاء. احتمال أن يشفى المريض إذًا:

$$P(c) = \frac{250}{5000} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$$

حيث يرمز $c$ إلى الحدث «شفاء المريض».

**مثـــــال** 2

رمت دنيا مكعَّب الأعداد. **ما احتمال حصولها على أحد مضاعفات 3؟**

الحـــل

مجموعة النتائج هي $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . يتحقَّق الحدث إذا حصلت دنيا على 3 أو 6. هذا يعني أن احتمال الحدث المطلوب هو إمكانيّتان من أصل 6 أي

$$P(M\,3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333 \approx 33.33\%$$

حيث يرمز M3 إلى الحدث «الحصول على مضاعف للعدد 3».

يبيِّن لنا المثالان السابقان طريقتَيْن لحساب الاحتمال:

**الطريقة الأولى**

تقوم هذه الطريقة على حساب احتمال الحدث عن طريق تكرار التجربة (تعدُّد حالات السرطان المدروسة) وتسجيل نتيجة كل منها (شفاء أو لا). يتحدَّد احتمال الحدث (الشفاء)، في هذه الطريقة، بنتائج التجارب المتكرِّرة. ويتم التعبير عنه بكسرٍ بسطُه عدد التجارب التي حقَّقت الحدث (حالات الشفاء)، ومقامه عدد التجارب كلِّها. يُسمّى هذا النوع من الاحتمال **الاحتمال الاختباري Experimental Probability**.

**الطريقة الثانية**

تقوم هذه الطريقة على حساب احتمال وقوع الحدث (الحصول على مضاعف للعدد 3) نظريًّا، دون الحاجة إلى إجراء تجارب (رمي المكعَّب). يتحدَّد احتمال الحدث (الحصول على مضاعف للعدد 3)، في هذه الطريقة، بشكل مسبق، ويتم التعبير عنه بكسرٍ بسطُه عدد النتائج التي تُحقِّق الحدث (نتيجتان هما 3 وَ 6)، ومقامه عدد النتائج المحتملة كلِّها (6). يُسمّى هذا النوع من الاحتمال **الاحتمال النظري Theoretical Probability**.

**تحــــدٍّ**

سحب فؤاد كرة واحدة من كيس فيه 4 كرات حمراء و7 كرات سوداء. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء؟

**الاحتمال Probability**

يُقاس **احتمال** وقوع حدث بواسطة عدد حقيقي يقع بين 0 وَ1.

إذا كان الحدث **مستحيلاً Impossible**، فإن احتمال وقوعه هو 0.

إذا كان الحدث **مؤكَّدًا Certain** فإن احتمال وقوعه هو 1.

مجموع احتمالات كل النتائج الممكنة هو 1.

## الاحتمال النظري Theoretical Probability

احتمال حدث من أحداث تجربة نتائجها متساوية الاحتمال، هو العدد الحقيقي الذي يساوي الكسر:

$$\frac{\text{عدد الحالات التي تحقّق الحدث}}{\text{عدد الحالات الممكنة كلّها}}$$







**مثال 3**

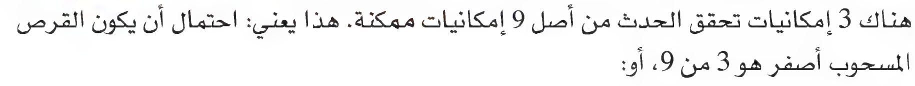
سحب مروان قرصًا من علبة تحتوي على قرصَين أحمرَين، وَ 4 أقراص زرقاء، وَ 3 أقراص صفراء. **ما احتمال أن يكون القرص المسحوب أصفر؟**

**الحل**

نتائج هذه التجربة العشوائيّة متساوية الاحتمال.

يمكننا تمثيل مجموعة نتائجها بالمجموعة التالية:

$$\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, B_4, Y_1, Y_2, Y_3\}$$



هناك 3 إمكانيات تحقق الحدث من أصل 9 إمكانيات ممكنة. هذا يعني: احتمال أن يكون القرص المسحوب أصفر هو 3 من 9، أو:

$$P(Y)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

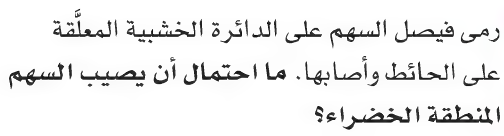
حيث يرمز $Y$ إلى الحدث «سحب قرص أصفر».

**حاوِلْ** سحب محمَّد قرصًا من علبة تحتوي على 3 أقراص حمراء وَ 5 أقراص زرقاء وَ 7 أقراص صفراء. ما احتمال أن يكون القرص المسحوب أزرق؟

كانت مجموعة النتائج في الأمثلة السابقة مؤلّفة من عدد محدد من العناصر. غير أنَّ هناك تجارب عشوائيّة تكون فيها هذه المجموعة غير محدودة.

**مثال 4**



رمى فيصل السهم على الدائرة الخشبية المعلَّقة على الحائط وأصابها. **ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة الخضراء؟**

**الحل**

كل نقطة من نقاط الدائرة الخشبية تشكِّل نتيجة ممكنة. نقول، في هذه الحالة، إن مجموعة النتائج **غيرمنتهية infinite**. النقاط التي تحقِّق الحدث هي نقاط المنطقة الخضراء. لحساب احتمال الحدث المطلوب، اقسم مساحة المنطقة الخضراء على المساحة الإجمالية للوحة.

$$P(G)=\frac{\text{مساحة المنطقة الخضراء}}{\text{المساحة الإجمالية للوحة}}=\frac{\pi(3)^2-\pi(2)^2}{\pi(3)^2}=\frac{5\pi}{9\pi}=\frac{5}{9}=0.556=55.6\%$$

حيث يرمز $G$ إلى الحدث «إصابة السهم للمنطقة الخضراء».

**حاوِلْ** ما احتمال أن يصيب السهم المنطقة الحمراء؟

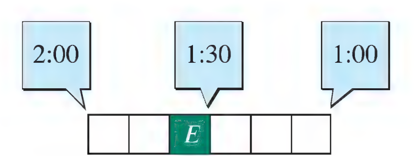
**مثال** 5

**تطبيقات حاسوب**

يطّلع كمال على بريده الإلكتروني يوميًّا، بين الساعة الواحدة 1:00 والساعة الثانية 2:00 بعد الظهر. **ما احتمال أن يقوم بذلك بين 1:30 وَ 1:40؟**

**الحل**

تتألف مجموعة النتائج من كل لحظة تقع بين 1:00 وَ 2:00. أما الحدث فهو مجموع اللحظات الواقعة بين 1:30 وَ 1:40. لحساب احتمال هذا الحدث نقسم الفترة الممتدَّة بين 1:00 وَ 2:00 إلى فترات طول كل منها 10 دقائق (طول الفترة الممتدَّة بين 1:30 وَ 1:40 التي تمثِّل الحدث).




الفترة الخضراء تمثِّل الحدث. احتمال تحقق الحدث، إذًا، فترة واحدة من 6 فترات أي:

$$P(E)=\frac{1}{6}=0.167=16.7\%$$

حيث يرمز $E$ إلى الحدث «اطّلاع كمال على بريده الإلكتروني بين 1:30 وَ 1:40».

**حاولْ** ما احتمال أن يقوم بذلك بين 1:30 وَ 1:35؟

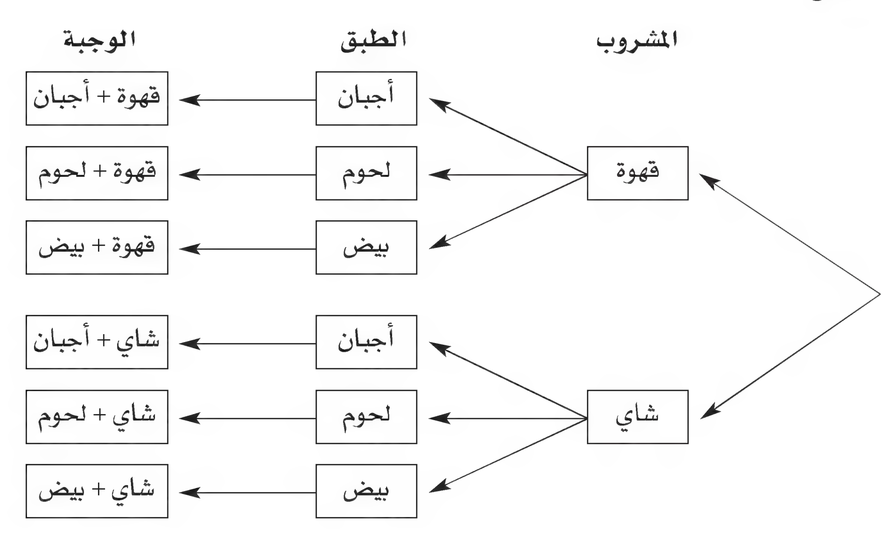
## قانون العد الأساسي Fundamental Counting Principle

حين تدرس حدثًا لحساب احتماله، تحتاج إلى:

**1**. عد جميع النتائج الممكنة. **2**. عد النتائج التي تحقّق الحدث.

يُمكنك استعمال مخطّط الشجرة للقيام بذلك.

خذ مثلاً وجبة الصباح في أحد الفنادق. يمكن للزبون أن يختار بين القهوة والشاي من ناحية وبين ثلاثة أطباق: أجبان ولحوم وبيض. يبيِّن المخطَّط أدناه جميع الطرق الممكنة لتركيب وجبة الصباح.



## النشاط

### استكشاف مخطّط الشجرة Exploring Tree Diagram

تتشكَّل وجبة العشاء في مطعم الأمراء من صحن سلطة وطبق لحوم. يمكن للزبون أن يختار واحدًا من نَوعي السلطة: سلطة الخس، سلطة الطماطم؛ وأن يختار طبق اللحوم من ثلاثة أنواع: لحم مشويّ، لحم مقليّ، لحم دجاج.




1. ابدأ برسم مخطّط شجرة يُبيِّن خيارَي السلطة كما هو مبيَّن.
2. ارسم، انطلاقًا من كل خيار سلطة، مخطّط شجرة يبيِّن خيارات اللحوم الثلاثة.
3. ما الوجبات التي يمكن تشكيلها؟ كم يبلغ عددها؟
4. يعرض المطعم الآن أن يزيد على طبق اللحم بصلاً مشويًّا أو ثومًا مشويًّا. أضف، إلى مخطّط الشجرة الذي أنشأته، مستوى ثالثًا يسمح لك بتعداد الوجبات التي يمكن تشكيلها. كم يبلغ هذا العدد؟

**نقطة مراقبة √**

**نقطة مراقبة √** أنشئ مخطّط شجرة للمثال السابق، دون الأخذ بالعرض الأخير المذكور في البند 4، بادئًا بالطبق كخيار أوّل. هل أدّى هذا التبديل في ترتيب الخيارَيْن إلى تغيير في النتائج؟

من شأن إمعان النظر في مخطّط الشجرة وإدراك طريقة إنشائه أن يوضح **قانون العدّ الأساسي**.

### قانون العدّ الأساسي Fundamental Counting Principle

إذا كان هناك $m$ طريقة لخيار أول وَ $n$ طريقة لخيار ثانٍ؛ فإن هناك $m \times n$ طريقة للخيارَين معًا.

## مثال 6

**تطبيقات حاسوب**

يريد سامي أن يختار كلمة السر الخاصّة به لدخول الأنترنت. تتكوَّن هذه الكلمة من حرفَيْن من الحروف الأبجدية الإنجليزية متبوعَيْن بأربعة أرقام. **كم كلمة سر يمكنه أن يشكِّل، علمًا بأن تكرار الأرقام ممكن وأن تكرار الأحرف ممكن وبأنه لا يستطيع استعمال الحرف O ولا الرقم 0؟** (عدد حروف الأبجدية الإنجليزية 26 حرفًا).

**الحــل**

بإمكان سامي أن يختار كل حرف من بين 25 حرفًا، وكل رقم من بين 9 أرقام. فإذا طبَّقنا قانون العدّ الأساسي حصل لدينا:

| | الحرف الأول | | الحرف الثاني | | الرقم الأول | | الرقم الثاني | | الرقم الثالث | | الرقم الرابع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الخيارات ← | 25 | × | 25 | × | 9 | × | 9 | × | 9 | × | 9 |

فيكون عدد كلمات السرّ الممكنة $41\ 00\ 625 = 25^2 \times 9^4$.

**مثــــــال**

**تطبيـــقات**
**تجـــارة**

7 تتكوَّن لوحة السيارات من ثلاثة أحرف متبوعة بثلاثة أرقام. **ما احتمال أن تكون أحرف لوحة سيارتك مكوَّنة من الأحرف الأولى لاسمك الثلاثيّ بالترتيب؟** (عدد حروف الأبجدية العربية 28 حرفًا).

**الحـــل**

ابدأ بعدّ عناصر مجموعة النتائج.

| الحرف الأول | | الحرف الثاني | | الحرف الثالث | | الرقم الأول | | الرقم الثاني | | الرقم الثالث |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | × | 28 | × | 28 | × | 10 | × | 10 | × | 10 |

فيكون عدد اللوحات الممكنة $28^3 \times 10^3 = 21\ 252\ 000$ لوحة.

احسب بعد ذلك عدد اللوحات التي تحقِّق الشرط.

| الحرف الأول | | الحرف الثاني | | الحرف الثالث | | الرقم الأول | | الرقم الثاني | | الرقم الثالث |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | 1 | × | 1 | × | 10 | × | 10 | × | 10 |

فيكون عدد اللوحات التي تحقِّق الشرط $10^3 = 1\ 000$ لوحة،

احتمال أن تكون أحرف لوحة سيارتك مكوَّنة من الأحرف الأولى لاسمك الثلاثي بالترتيب هو $\frac{1000}{21\ 952\ 000} = 0.000045$، أي 45 في المليون.

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

1 أعطِ ثلاثة أمثلة على حدث لا يقتصر على نتيجة واحدة.

2 بِمَ يتشابه الاحتمال النظري والاحتمال الاختباري؟ بِمَ يختلفان؟

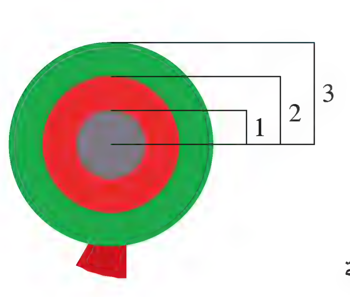
3 كيف تستعمل المساحات لحساب الاحتمالات؟

4 كيف يساعدك مخطَّط الشجرة على فهم قانون العدّ الأساسي؟



## تمارين موجَّهة

5 سحب جميل كرة زجاجية واحدة من كيس فيه 5 كرات زرقاء، وَ 3 كرات حمراء، وكرة بيضاء. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟




6 رمت ليلى سهمًا على لوحة خشبية معلَّقة على الحائط وأصابتها. ما احتمال أن يُصيب السهم منطقة الدائرة الصغرى؟

7 يطّلع سعيد على بريده الإلكتروني يوميًّا بين الساعة السابعة والساعة الثامنة صباحًا. ما احتمال أن يقوم بذلك بين 7:30 وَ 7:45؟

**8** يريد صفوان أن يختار كلمة سر خاصة به لدخول الإنترنت. تتكوَّن هذه الكلمة من 3 أحرف من حروف الأبجدية الإنجليزية متبوعة بثلاثة أرقام. كم كلمة سرّ يمكنه أن يشكِّل، علمًا بأنه لا يستطيع استعمال الحرف O ولا الرقم 0؟

## تمارين وتطبيقات

**يحتوي كيس على 3 بطاقات بيضاء وبطاقتين سوداوَيْن وَ5 بطاقات حمراء، جميعها متماثلة. سحب رياض بطاقة واحدة. ما احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة:**

**9** بيضاء؟ **10** سوداء؟ **11** حمراء؟

**ما احتمال كل من الأحداث التالية،لدى رمي مكعَّب الأعداد مرَّة واحدة؟**

**12** الحصول على 1
**13** الحصول على 4
**14** الحصول على عدد زوجي
**15** الحصول على عدد فردي
**16** الحصول على عدد أصغر من 3
**17** الحصول على عدد أكبر من 3
**18** الحصول على عدد أكبر من 6
**19** الحصول على عدد أصغر من 7

**يبلغ الباص الموقف المجاور لمنزل دانا بين الساعة الثامنة والثامنة و 5 دقائق صباحًا. ما احتمال أن يركب دانا الباص إذا وصل إلى الموقف في الأوقات التالية:**

**20** 8:04؟ **21** 8:02؟ **22** 8:01؟ **23** 8:03؟

**في التمرينَيْن 24 وَ25، أنشئ مخطَّط شجرة يبيِّن كل النتائج الممكنة.**

**24** التسجيل في النشاطات اللاصفيَّة (نشاط واحد من كل فئة).

**رياضة:** كرة قدم، كرة سلة، كرة طاولة.
**فنون:** موسيقا، رسم.
**أندية:** علوم، رياضيات.

**25** الهوايات (هواية واحدة من كل فئة).

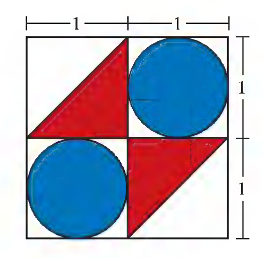
**داخل المنزل:** القراءة، مشاهدة التلفزيون، الاستماع إلى الموسيقا.
**خارج المنزل:** الجري، التنزُّه، ارتياد النادي.

**حدِّد عدد كلمات السر التي يمكن تكوينها باستعمال جميع الحروف الأبجدية الإنجليزية وجميع الأرقام في كل حالة:**

**26** رقمان متبوعان بثلاثة أحرف يتبعها رقم واحد.
**27** ثلاثة أرقام متبوعة بحرفَيْن يتبعهما رقم واحد.
**28** ثلاثة أحرف مختلفة متبوعة بثلاثة أرقام مختلفة.
**29** حرفان متبوعان بأربعة أرقام.

ربـــــط

**هندسة** يرمي سامي سهامه على لوحة خشبيَّة ممثَّلة في الشكل المقابل.
احسب احتمال كل من الأحداث التالية:




**30** أن يصيب السهم منطقة دائرية.

**31** أن يصيب السهم أحد المثلَّثين الأحمرَيْن.

**32** أن يصيب السهم أحد المثلَّثين الأبيضَيْن.

تحــــدٍّ

**33** أن يصيب السهم منطقة بيضاء.

تطبيـــقات

**ديموغرافيا** يبيِّن الجدول أدناه أعداد السكان، من غير الأطفال، في إحدى البلدات، وفقًا للعمر والجنس.

| العمر | ذكور | إناث |
|---|---|---|
| 17 − 14 | 83 | 93 |
| 19 − 18 | 1 224 | 1 416 |
| 21 − 20 | 1 294 | 1 414 |
| 24 − 22 | 1 260 | 1 263 |
| 29 − 25 | 950 | 1 058 |
| 34 − 30 | 661 | 811 |
| 35 فما فوق | 955 | 1 824 |

**قام عميد الكلِّيَّة باختيار أحد المسجَّلين. ما احتمال أن يكون عمر هذا الشخص في الفئة:**

**34** 18 − 24؟ **35** 25 − 29؟ **36** 30 − 34؟ **37** 30 وما فوق؟

**38** **أمن** يعمل أحد المختصّين في شؤون الأمن على تشكيل مفتاح لأحد أنظمة الأمن. يستعمل حروفًا من بين $C$ ،$B$ ،$A$، يُمكن لكل منها أن يتكرَّر أكثر من مرة. يريد هذا المُختصّ أن يكون احتمال النجاح لمحاولات فكّ المفتاح أقلّ من 0.001. كم يبلغ العدد الأدنى لحروف هذا المفتاح؟

## نظرة إلى الوراء

**ما درجة كل حدودية؟**

**39** $x^3+4x^5-6x^2+x-10$

**40** $x+3x^5$

**حُلَّ كل معادلة أو متباينة.**

**41** $x^3-2x^2-x+2=0$

**42** $x^2-3x+2>0$

تطبيقات
**اقتصاد**

**43** يُقدِّر أحد الصناعيين أن الدالّة $C(x)=0.1x^2+5x+40$ تُشكِّل نموذجًا لكلفة الإنتاج. يرمز $x$، في هذه الدالّة، إلى عدد الوحدات المُنتجة، ويرمز $C$ إلى كلفة إنتاجها بالدنانير. ما كلفة إنتاج 10 سلع؟
من ناحية أخرى، قرّر الصناعيّ أن يبيعَ إنتاجه بسعر 60 ألف دينار للوحدة. ما عدد الوحدات التي عليه بيعها ليحقِّق أعلى ربح؟

## نظرة إلى الأمام

**44** يريد فاروق أن يختار حرفين من الأحرف $E$، $D$، $C$، $B$، $A$. كم يبلغ عدد الحلول الممكنة، إذا اهتمَّ فاروق بالترتيب الذي يسحب به حرفَيْه (أي أن الحل $A$، $B$ هو غير الحل $B$، $A$)؛ وإذا لم يهتم بهذا الترتيب (أي أن الحلَّين $A$، $B$ وَ $B$، $A$ هما حل واحد).




# التباديل والتراتيب

## Permutations and Arrangements

**لماذا**

هناك حالات كثيرة تتناول تنسيق عدد محدد من عناصر مجموعة بشكل مرتَّب.



في الموسيقا ذات الأنغام الاثني عشر، التي أدخلها أرنولد شوينبرغ، يجب استعمال كل نوتة من نوتات السلَّم الموسيقي مرة واحدة على الأقلّ، قبل ترداد أي منها. يُطلق على كل مجموعة من 12 نغمًا اسم **السطر النغمي Tone Row**. كم سطرًا نغميًّا مُختلفًا يمكنك أن تكتب؟

**الأهداف**

- يحلّ مسائل تتضمَّن تباديل، ويحدِّد عدد تباديل مجموعة من $n$ عنصرًا.
- يحلّ مسائل تتضمَّن تراتيب، ويحدِّد جميع تراتيب $r$ عنصرًا من أصل $n$.

## التباديل Permutations

**التبديل Permutation** هو تنسيق عدد من الأشياء في ترتيب معيَّن.

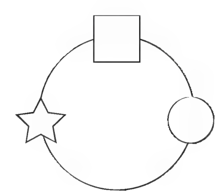
**مثـــال 1**

ارسم جميع تباديل الأشياء التالية: ☆، ○، □ .

**الحل**

| | | |
|---|---|---|
| ☆ ○ □ | ○ □ ☆ | □ ☆ ○ |
| ☆ □ ○ | ○ ☆ □ | □ ○ ☆ |

يمكنك تنسيق الأشياء على خطّ مستقيم، كما في المثال السابق . ويمكنك أيضًا تنسيقها على دائرة، كما هو مبيَّن في الشكل المقابل.



تنسيق الأشياء في الحالة الأولى هو **تبديل خطّي Linear Permutation**، وفي الثانية **تبديل دائري Circular Permutation**.

**مثـــــال** 2

حل المسائل

**إنشاء لائحة منظَّمة:** يبيِّن الجدول التالي جميع التباديل الممكنة للأحرف اللاتينية $D$، $C$، $B$، $A$.
**كيف تستعمل قانون العدّ الأساسي لتجد عدد هذه التباديل؟**

| ABCD | BACD | CABD | DABC |
|---|---|---|---|
| ABDC | BADC | CADB | DACB |
| ACBD | BCAD | CBAD | DBAC |
| ACDB | BCDA | CBDA | DBCA |
| ADBC | BDAC | CDAB | DCAB |
| ADCB | BDCA | CDBA | DCBA |

**الحـــل**

يمكنك تحديد عدد هذه التباديل باستعمال قانون العدّ الأساسي، كما هو مبيَّن فيما يلي:

| يمكن اختيار الحرف الأول من | يمكن اختيار الحرف الثاني من | يمكن اختيار الحرف الثالث من | يمكن اختيار الحرف الرابع من |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |

عدد جميع التباديل يساوي، إذًا، $4\times3\times2\times1=24$، أي 24 تبديلاً.

للتعبير المختصر عن ناتج الضرب هذا، استعمل $4!=24=4\times3\times2\times1$.

**مضروب $n$** **$n$ factorial**

إذا كان $n$ عددًا صحيحًا غير سالب، فإن **مضروب $n$**، ونكتبه $n!$، هو:

$$n!=\begin{cases}1 & : n=0\\ 1\times2\times\ldots\times n & : n>0\end{cases}$$

**مثـــــال** 3

تبارى سليم ورائد وخليل في الجري.
**ما النتائج الممكنة لهذه المباراة؟ كم يبلغ عددها؟ ما احتمال أن يكون خليل الأوّل؟**

**الحـــل**

النتائج الممكنة لهذه المباراة:

| **أول** | سليم | سليم | رائد | رائد | خليل | خليل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **ثانٍ** | رائد | خليل | سليم | خليل | سليم | رائد |
| **ثالث** | خليل | رائد | خليل | سليم | رائد | سليم |

عدد النتائج الممكنة 6. لاحظ أن مجموعة النتائج مؤلّفة من النتائج الممكنة البالغ عددها 6، وأن عدد النتائج التي تحقّق الحدث (خليل هو الأوّل) 2. بناءً على ذلك، فإن احتمال أن يكون خليل الأول هو

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

**حـــاولْ** كم عددًا من 4 أرقام يمكنك أن تكتب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4 من دون تكرار؟ اكتب تلك الأعداد.

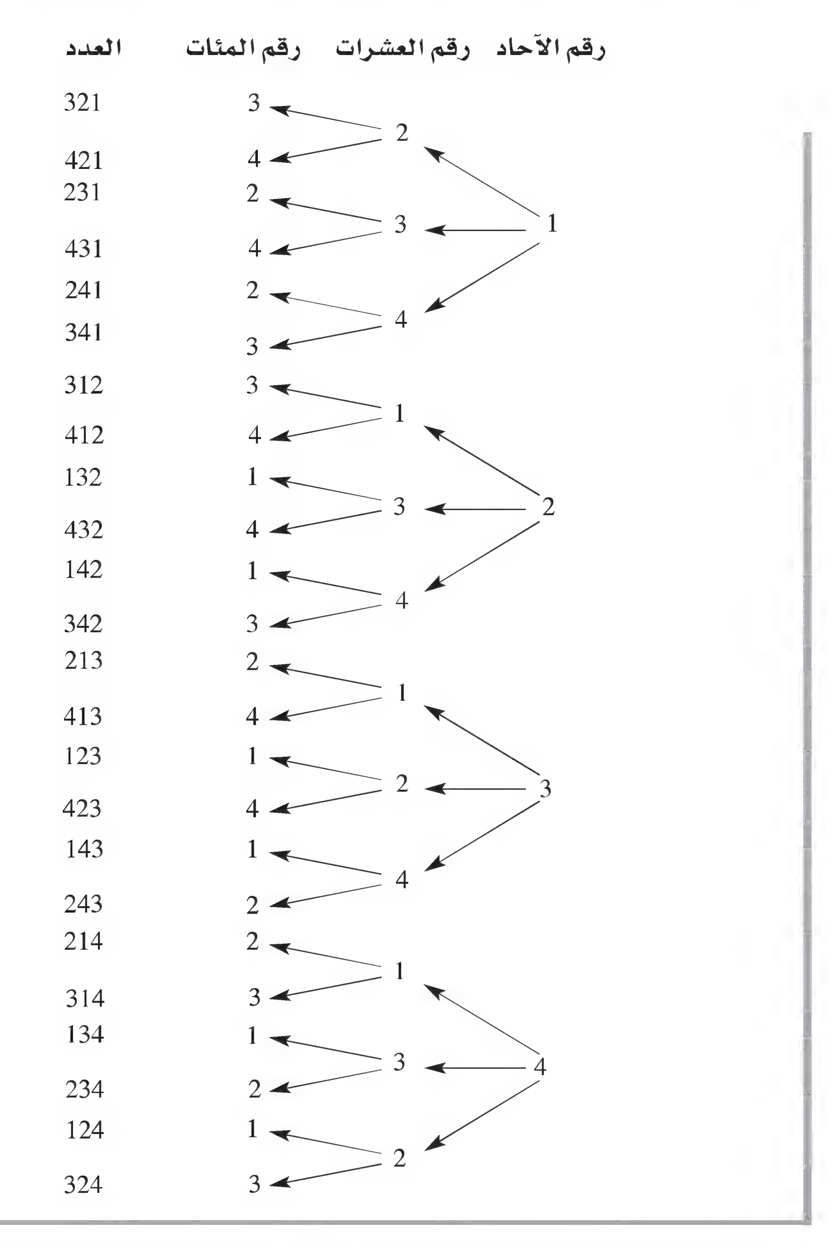
## Arrangements التراتيب

**مثـــــــال** 4 **كم عددًا من 3 أرقام يمكنك أن تكتب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، من دون تكرار؟ اكتب تلك الأعداد.**

**الحـل**

استعمل مخطَّط شجرة. يبيِّن مخطَّط الشجرة أدناه جميع الخيارات الممكنة، لاختيار رقم الآحاد، ثم رقم العشرات، ثم رقم المئات. كما يبيِّن العدد الذي تكتبه في كل حالة.

يمكنك أن تكتب 24 عددًا من 3 أرقام باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، من دون تكرار.




**حـــاولْ** كم عددًا من 4 أرقام يمكنك أن تكتب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، من دون تكرار؟

تعبّر عما قمت به في المثال السابق بالقول إنّك رتّبت 3 أرقام من أصل الأرقام الأربعة 1، 2، 3، 4. وتسمّي ما حصلت عليه **تراتيب** 3 أشياء من أصل 4. للحصول على عدد هذه التراتيب، استعمل قانون العدّ الأساسي:

| يمكن اختيار رقم الآحاد من | | يمكن اختيار رقم العشرات من | | يمكن اختيار رقم المئات من |
|---|---|---|---|---|
| 4 | × | 3 | × | 2 |

وهكذا يكون عددها $4 \times 3 \times 2 = 24$ ، أي 24 ترتيبًا.

**مثـــال** 5

**تطبيقات**
**موسيقا**

أهدى والد سمير ابنه 10 أقراص مُدمجة موسيقية.
أراد سمير الاستماع إلى ثلاثة منها على التوالي.
**كم خيارًا لدى سمير؟**



**الحل**

بإمكان سمير أن يختار القرص الأول من 10 أقراص، والثاني من 9 أقراص، والثالث من 8 أقراص. فإذا استعملت قانون العدّ الأساسي وجدت أن أمام سمير $10 \times 9 \times 8 = 720$ خيارًا.

**حـــاولْ** اشترى مروان 5 روايات ليقرأ ثلاثًا منها على التوالي خلال العطلة الصيفية. كم خيارًا لدى مروان؟

### تراتيب $r$ شيئًا من أصل $n$ — Arrangements of $n$ Objects Taken $r$ at a Times

عدد تراتيب $r$ شيئًا من أصل $n$، حيث $r \le n$ ، هو $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

**مثـــال** 6

تريد سلمى أن تضع 4 كتب في خزانتها التي تحتوي على 10 رفوف، شرط ألاّ تضع أكثر من كتاب واحد على كل رف. **كم خيارًا لديها؟**

**الحل**

تعود المسألة إلى ترتيب 4 رفوف من أصل 10. تختار سلمى الرف الأول من 10، والثاني من 9، والثالث من 8، والرابع من 7. وهكذا يكون عدد الخيارات

$$P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{\not{1}\times\not{2}\times\not{3}\times\not{4}\times\not{5}\times\not{6}\times7\times8\times9\times10}{\not{1}\times\not{2}\times\not{3}\times\not{4}\times\not{5}\times\not{6}} = 7\times8\times9\times10 = 5040$$

**حـــاولْ** عند سعيد 8 علب مرقّمة و5 كرات ملوّنة بألوان مختلفة. يريد وضع الكرات في العلب، شرط ألا يضع أكثر من كرة واحدة في كل علبة. **كم خيارًا لديه؟**

## التباديل الدائرية — Circular Permutations

**مثـــال** 7

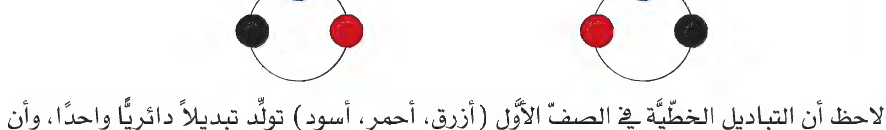
في حديقة ليلى 3 مقاعد: أزرق وأحمر وأسود. تريد ليلى ترتيب هذه المقاعد حول طاولة مستديرة.
**ما خيارات ليلى؟ كم عددها؟**

**الحـــل**

إذا نظرت إلى التباديل الخطّية للمقاعد الثلاثة تجد ما يلي:







لاحظ أن التباديل الخطّيّة في الصفّ الأوّل (أزرق، أحمر، أسود) تولّد تبديلاً دائريًّا واحدًا، وأن التباديل الخطّيّة في الصف الثاني (أزرق، أسود، أحمر) تولّد تبديلاً دائريًّا واحدًا. إذًا لدى ليلى خيارانِ لوضع المقاعد حول الطاولة.

**حـــاولْ** كم خيارًا لديك، لترتيب 4 أنواع من المُقبِّلات في صحنٍ دائريّ؟

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

1. كيف يساعد قانون العدّ الأساسي على تحديد عدد التباديل لأربعة أشياء؟
2. كيف يساعد قانون العدّ الأساسي على تحديد عدد التراتيب لأربعة أشياء من أصل خمسة؟

## تمارين موجَّهة

3. كم عددًا يمكنك أن تكتب باستعمال ستة أرقام معطاة من دون تكرار؟
4. كم خيارًا لديك لمشاهدة 3 أشرطة فيديو على التوالي من أصل سبعة؟
5. كم خيارًا لدى 21 شخصًا لكي يجلسوا إلى طاولة مستديرة لتناول العشاء؟

**احسب.**

6. $7! - 5$
7. $6! - 4!$
8. $(7-5)!$
9. $(6-4)!$
10. $\frac{8!}{5! \times 3!}$
11. $\frac{10!}{4! \times 6!}$
12. $\frac{0! \times 5!}{(4-1)!}$
13. $\frac{3! \times (7-2)!}{0!}$

## تمارين وتطبيقات

**مع سارة 8 أرقام. كم عددًا يمكنها أن تكتب بحسب ما هو مذكور، مستعملة أرقامًا من الثمانية، من دون تكرار؟**

14. من 5 أرقام
15. من 3 أرقام
16. من 4 أرقام
17. من 6 أرقام
18. من رقم واحد
19. من 8 أرقام

**تطبيـــقات**

**إدارة مؤسسات** استقبلت إحدى الشركات 8 موظّفين جدد. حدِّد عدد الخيارات لتوزيعهم على الوظائف الشاغرة في كل من الحالات الآتية:

20 8 وظائف　21 9 وظائف　22 10 وظائف　23 15 وظيفة

24 يريد بائع النظّارات أن يعرض على منصّة مستديرة 7 أنواع من النظّارات الشمسية. كم خيارًا لديه لترتيبها؟

25 تريد إحدى الشركات أن تعطي كل موظَّف من موظَّفيها ترقيمًا من 7 أرقام. كم يبلغ عدد الترقيمات الممكنة، علمًا أن بالإمكان استعمال الأرقام العشرة من 0 إلى 9؟ كم يبلغ عددها إذا كان التكرار ممنوعًا؟

26 أراد رزكار أن يصنع دولابًا مؤشّرًا يحمل الأرقام من 1 إلى 3. قسّم الدولاب إلى 3 أقسام متساوية. كم طريقةً لديه لكتابة الأرقام الثلاثة؟

**ربط**

**هندسة** غالبًا ما ترمز إلى مضلَّع بتسمية رؤوسه باستعمال الأحرف. حدِّد عدد الطرق التي يمكن بها تسمية كل مضلَّع من المضلّعات المذكورة في التمارين اللاحقة، علمًا بأن الأحرف المتاحة هي: $A, B, C, D, E, F$.

27 مثلَّث　28 رُباعي　29 سُداسي　30 خُماسي

**تطبيقات**

31 **رياضة** تبارى 7 فتيان في الركض. كم يبلغ عدد ترتيبات الفائزين المُحتملة (أوّل، ثانٍ، ثالث)؟

## نظرة إلى الوراء

32 **القيَم القصوى** مع كولاله قطعة كرتون مستطيلة طولها 48cm وعرضها 36cm. وتريد أن تصنع منها علبة مفتوحة إلى أعلى على شكل شبه مكعّب، وذلك بقصّ 4 مربّعات صغيرة من رؤوسها الأربعة وطي أطراف القطعة الباقية. كم ينبغي أن يكون الطول الذي ستختاره لضلع المربَّع، كي تحصل على أقصى حجم للعلبة؟ كم يبلغ ذلك الحجم؟

33 حُلَّ نظام المعادلتَيْن (انتبه: إحدى المعادلتَيْن غير خطّية):

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$$

## نظرة إلى الأمام

34 تشترك 6 أندية في دوري كرة القدم. يشكّل منظِّم الدوري مجموعاتٍ من ناديين للتباري. كم مجموعة يمكنه أن يشكِّل؟




# التوافيق Combinations

**الأهداف**

- يحلّ مسائل تتضمَّن توافيق، ويحدِّد جميع توافيق $r$ عنصرًا من أصل $n$.
- يحلّ مسائل تتناول العلاقة بين التباديل والتوافيق.



**لماذا**

للتوافيق دور مهمٌّ في الحياة. هي مثلاً تسمح باحتساب عدد الفرق المكوَّنة من 3 طلاب التي يُمكن تشكيلها من طلاب الصف العاشر.

تذكَّر أن الترتيب هو تنسيق $r$ شيئًا من أصل $n$ في ترتيب مُعيَّن. إذا لم تفرض على التنسيق أن يكون مرتَّبًا، تحصل على ما يُسمّى **التوفيق**. توفيق $r$ عنصرًا من أصل $n$، هو مجموعة مكوَّنة من $r$ عنصرًا من أصل $n$.

إذا كان لديك الأعداد التالية: 1، 2، 3، 4، 5، فإن الأعداد 2، 3، 5 تشكِّل توفيق 3 عناصر من أصل 5. لاحظ أن الأعداد 3، 2، 5 تشكِّل التوفيق نفسه، بخلاف ما يحصل مع التراتيب.

**مثـــــال 1**

**تطبيـــقات**
**ريـاضـة**

يجري النادي الرياضي اقتراعًا سرّيًّا. سيختار من بين 7 مرشّحين، لجنة إداريَّة مكوَّنة من رئيس ونائب رئيس وأمين سرّ وأمين صندوق ومسؤول علاقات. **كم يبلغ عدد التشكيلات الممكنة؟**

**الحـل**

لاحتساب عدد التشكيلات الممكنة، نلاحظ أنّ بالإمكان

| اختيار الرئيس من | | اختيار نائب الرئيس من | | اختيار أمين السرّ من | | اختيار أمين الماليَّة من | | اختيار مسؤول العلاقات من |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | × | 6 | × | 5 | × | 4 | × | 3 |

عدد التشكيلات الممكنة، إذًا، هو

$$7\times6\times5\times4\times3=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{7!}{2!}=\frac{7!}{(7-5)!}=2520$$

**مثـــــال 2**

غيَّر النادي الرياضي طريقة اختيار اللجنة الإدارية، وصار على كل عضو من الأعضاء أن يختار 5 مُرشَّحين من السبعة، ليشكِّلوا اللجنة الإدارية، دون تحديد صفة أيٍّ منهم، تاركًا لأعضاء اللجنة المنتخَبة توزُّع المهامّ فيما بينهم.

حل المسائل

أ كم طريقةً يمكن للأعضاء الخمسة المنتخبين أن يتوزّعوا بها المهام فيما بينهم؟

ب كم لجنة إداريَّة يمكن للأعضاء انتخابها بطريقة الاختيار الجديدة؟

**الحـل**

أ عدد الطرق هو عدد تباديل مجموعة من 5 عناصر. إنه يساوي $120 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ .

ب لاحظ أن كل لجنة مختارة تولِّد 120 تشكيلاً للجنة الإدارية. استعملْ قانون العد الأساسي:

عدد التشكيلات = عدد اللجان المختارة × عدد تباديل كل لجنة

2520 = اللجان المختارة × 120

عدد اللجان التي يمكن اختيارها $21 = \frac{2520}{120}$ ، أي 21 لجنة.

## النشاط

## مقارنة التراتيب والتوافيق Comparing Arrangements and Combinations

نظَّم أحد الأندية لعبة بين أعضائه تتلخَّص كما يلي:

- يختار اللاعب 3 أرقام من الأرقام العشرة (من 0 إلى 9) ويكتبها على اللوح.
- يسحب اللاعب، من كيس قاتمٍ، 3 كرات مرقَّمة من 0 إلى 9، الواحدة تلو الأخرى.
- يفوز اللاعب إذا طابقت الأرقام التي سحبها الأرقام المكتوبة على اللوح بالترتيب نفسه.

1. اختار آرام الأرقام 8، 4، 1 على التوالي. ما النتائج التي تقوده إلى الفوز؟
2. بدَّل مُنظِّم اللعبة قواعدها. واشترط، لكي يفوز اللاعب، أن يسحب الأرقام الثلاثة مهما يكن ترتيب سحبها. أعاد آرام اللعب مُصرًّا على أرقامه. ما النتائج التي تقوده إلى الفوز؟
3. أي اللعبتَيْن توفِّر حظًّا أكبر للاعب: الأولى أم الثانية؟ علِّل إجابتك.

نقطة مراقبة √

### توافيق $r$ شيئًا من أصل $n$ Combinations of $n$ Objects Taken $r$ at a Time

عدد توافيق $r$ شيئًا من أصل $n$، حيث $r \leq n$ ، هو $_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

**مثـــال** 3 **تطبيقات** تجارة

ينبغي لسعيد أن يختار 3 أكواب من 5 أكواب تحتوي على عصير الفواكه التالية: ليمون، تفّاح، عنب، موز، أناناس. **كم خيارًا لديه؟**

الحل

بإمكانه أن يختار الكوب الأول من 5 أكواب، والثاني من 4 أكواب، والثالث من 3 أكواب. غير أن اختيار عصير الليمون وعصير الموز وعصير العنب لا يختلف عن اختيار عصير الموز وعصير العنب وعصير الليمون. أي إن الترتيب الذي يتّبعه سعيد في اختيار الأكواب، ليس له أي دور في هذه المسألة. هذا يعني أنَّ عدد الخيارات لدى سعيد هو عدد تراتيب 3 من 5 مقسومًا على عدد تباديل 3 أشياء، أي: $\frac{5!}{(5-3)!} \div 3! = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$ .

**حــاولْ** كم خيارًا يصبح لدى سعيد إذا كان عليه اختيار 4 من 5 أكواب؟

**تفكير ناقد** أيُّهما أكبر: عدد تراتيب 3 من أصل 5، أم عدد توافيق 3 من أصل 5؟

تستنتج من المثالَيْن السابقَيْن أن هناك علاقة بين عدد تراتيب $r$ شيئًا من أصل $n$، وعدد توافيق $r$ شيئًا من أصل $n$.

**العلاقة بين التراتيب والتوافيق** Relation Between Arrangements and Combinations

عدد توافيق $r$ شيئًا من أصل $n$ × عدد تباديل $r$ شيئًا = عدد تراتيب $r$ شيئًا من أصل $n$ .

$${}_nP_r = r! \times {}_nC_r$$

**مثـــال** 4

عند حل مسألة، غالبًا ما تحتاج إلى اختيار النموذج المناسب: التراتيب أو التوافيق.

**حدِّد النموذج المناسب، ثم احسب العدد.**

أ كم طريقة يوجد لاختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سر من 5 مرشحين؟

ب كم طريقة يوجد لاختيار لجنة من 3 أعضاء من 5 مرشحين؟

الحل

أ النموذج هنا هو نموذج التراتيب، لأن المطلوب اختيار شخص للرئاسة، وآخر لنيابة الرئاسة، وثالث لأمانة السر. عدد التشكيلات هو $\frac{5!}{(5-3)!} = 5\times4\times3 = 60$ .

ب النموذج هنا هو نموذج التوافيق، لأن المطلوب هو مجموعة من 3 أشخاص. عدد التشكيلات هو:

$${}_5C_3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10 .$$

**حــاولْ** كم طريقة يوجد لاختيار لجنة من شخصَيْن بينَ 7 أشخاص؟ كم طريقة يوجد لاختيار رئيس ونائب رئيس من أعضاء لجنة تضمّ 7 أشخاص؟

## استعمال التوافيق في الاحتمال Using Combinations in Probability

**مثـــال** 5

سحبت كيلاس كُرتَيْن من كيس يحتوي على 5 كرات حمراء وَ 3 كرات زرقاء.

**ما احتمال أن تكون الكرتان حمراوَيْن؟**

الحل

يساوي هذا الاحتمال نسبة عدد الحالات التي تكون فيها الكرتان المسحوبتان حمراوَيْن إلى عدد

عناصر مجموعة النتائج. العدد الأول هو عدد توافيق 2 من 5، والثاني هو عدد توافيق 2 من 8 (8 هو عدد جميع الكرات). العدد الأول $\frac{5\times4}{2\times1}=10$ $={}_5C_2=\binom{5}{2}$، والثاني $_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$.

فاحتمال أن تكون الكرتان حمراوَيْن هو $\frac{10}{28}\approx0.3\,571=35.71\%$ .

**حـــاولْ** ما احتمال أن تكون الكرتان من لونَيْن مختلفَيْن؟

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

1. أوضح الفرق بين التراتيب والتوافيق. أعطِ مثالاً يدعم إيضاحك.
2. ما العلاقة بين تراتيب 5 من أصل 7، وتوافيق 5 من أصل 7؟ اكتب هذه العلاقة، واحسب عدد توافيق 5 من أصل 7.

## تمارين موجَّهة

3. كم طريقة تُتبَّع لاختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سر بين أعضاء لجنة تضم 6 أشخاص؟
4. كم طريقة تُتبَّع لاستعارة 3 كتب وَ4 أشرطة موسيقا من صديق لديه 9 كتب وَ7 أشرطة موسيقا؟

## تمارين وتطبيقات

**احسب.**

5. $_7C_4$
6. $_8C_4$
7. $_{10}C_7$
8. $_9C_5$
9. $_9C_1$
10. $_{11}C_1$
11. $_{15}C_{15}$
12. $_{12}C_{12}$
13. $\frac{6!}{2!\times4!}\times\frac{5!}{4!\times1!}$
14. $\frac{4!}{3!\times1!}\times\frac{9!}{4!\times5!}$
15. $\frac{_6C_5\times{}_{15}C_2}{_{21}C_7}$
16. $\frac{_{14}C_5\times{}_9C_7}{_{23}C_{12}}$

**كم لجنة يمكن أن تُشكَّل في كل حالة؟**

17. 3 أعضاء من أصل 5 مرشَّحين
18. 7 أعضاء من أصل 8 مرشَّحين
19. 8 أعضاء من أصل 12 مرشَّحًا
20. 6 أعضاء من أصل 10 مرشَّحين

**يحتوي كيس قاتم على 5 كرات بيضاء وَ3 كرات خضراء. ما احتمال سحب:**

21. كرتَيْن من لونَيْن مختلفَيْن؟
22. 3 كرات، اثنتان منها خضراوان والثالثة بيضاء؟

23 4 كرات، اثنتان منها بيضاوان واثنتان خضراوان؟

24 5 كرات، 3 منها خضراء واثنتان بيضاوان؟

**حدِّد النموذج (تراتيب أو توافيق) في كل حالة من حالات التمارين 25–28.**

25 اختيار 4 كتب للنشر من أصل مجموعة كتب تضم 302.

26 اختيار 9 لاعبين من أصل 15 لاعبًا، لتشكيل فريق سلّة.

27 اختيار أربعة مرشَّحين من أصل 200، لنيل جوائز من 10 000 دينار وَ20 000 دينار و50 000 دينار وَ 100 000 دينار.

28 اختيار رئيس ونائب رئيس لصف من 100 تلميذ.

تطبيقات

29 **طب** في دراسة عن أمراض القلب، اختار أحد الباحثين عيِّنة من 5 أشخاص بين 10 يمارسون رياضة الجري، وَ15 لا يمارسون هذه الرياضة.

أ كم يبلغ عدد التشكيلات المكنة؟

ب كم يبلغ عدد التشكيلات التي تتضمَّن 3 فقط ممَّن يمارسون رياضة الجري؟

ج ما احتمال أن يكون بين الخمسة المختارين 3 فقط يمارسون رياضة الجري؟



## نظرة إلى الوراء

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة.**

30 $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}$

31 $\frac{2}{x(x-2)}-\frac{x}{x^2-4}$

**حُلّ كل معادلة.**

32 $\sqrt{x+4}=2$

33 $\sqrt{x-1}=3\sqrt{x-2}$

34 $\sqrt{-x}=4\sqrt{-x-2}$

## نظرة إلى الأمام

35 بغية تسمية أعضاء مكتب نادي النشاط، تم سحب 5 أسماء بالقرعة من بين أسماء المرشَّحين المكوَّنين من 8 أعضاء شرف وَ22 عضوًا عاملاً.

أ ما احتمال أن تكون الأسماء الخمسة عائدة إلى أعضاء شرف؟

ب ما احتمال أن تكون 4 من الأسماء الخمسة عائدة إلى أعضاء شرف؟

ج ما احتمال أن تكون من بين الأسماء الخمسة 3 أسماء على الأقلّ عائدة إلى أعضاء شرف؟




# جمع الاحتمالات Adding Probabilities

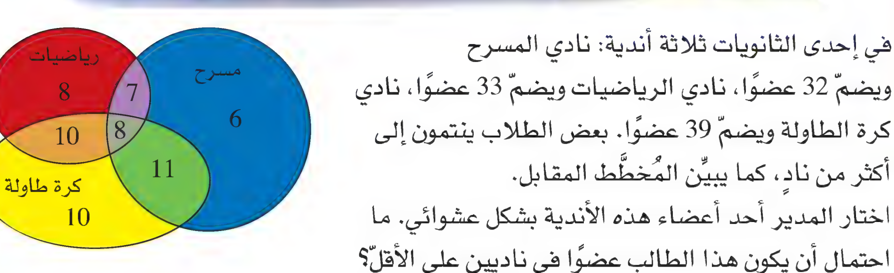


**لماذا**
يمكنك استعمال عملية الجمع لحساب احتمال وقوع حدثَيْن أو أكثر.

**الأهداف**
- يحسب احتمال حدثَيْن متنافيَيْن.
- يحسب احتمال حدثَيْن غير متنافيَيْن.
- يحسب احتمال الحدث النقيض.

**تطبيقات**
تسلية

في إحدى الثانويات ثلاثة أندية: نادي المسرح ويضمّ 32 عضوًا، نادي الرياضيات ويضمّ 33 عضوًا، نادي كرة الطاولة ويضمّ 39 عضوًا. بعض الطلاب ينتمون إلى أكثر من نادٍ، كما يبيِّن المُخطَّط المقابل.
اختار المدير أحد أعضاء هذه الأندية بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون هذا الطالب عضوًا في ناديين على الأقلّ؟




بعض الأحداث تتنافى، بحيث إذا وقع أحدها انتفى وقوع الأحداث الأخرى. إذا رمينا مكعَّب الأعداد، فإن حدثَي «الحصول على عدد فرديّ» و «الحصول على عدد زوجيّ» هما حدثان **مُتنافيان Mutually Exclusive**.

على العكس من ذلك، فإن حدثَي «الحصول على عدد زوجيّ» و «الحصول على عدد أقلّ من 3» غير متنافيَيْن، لأن الحصول على 2 يحقّق الحدثَيْن معًا. إذا كان $A$ وَ $B$ حدثين فإننا نكتب الحدث «$A$ أو $B$» على الصورة $A \cup B$ والحدث «$A$ وَ $B$» على الصورة $A \cap B$ .

## النشاط

### استكشاف احتمال حدثَيْن Exploring Two-Events Probability

سوف تحتاج إلى مكعبَيْ أعداد من لونَيْن مختلفَيْن.

١. انسخ الجدول ثم أكمله، بعد رمي مكعَّبَيِ الأعداد 10 مرّات، وأخذ العددَين الظّاهرين على الوجهَين العلويَّين للمكعَّبَين.

| الرمية | المكعَّب الأول | المكعَّب الثاني | المجموع | ناتج الضرب |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| ⋮ | | | | |

**2.** انسخ الجدول المقابل وأكمله معتمدًا على نتائج الجدول الأوّل ومبيِّنًا احتمال كل حدث، في كلٍّ من الحالات التالية:

| | أ | ب | ج |
|---|---|---|---|
| $P(A)$ | | | |
| $P(B)$ | | | |
| $P(A \cup B)$ | | | |
| $P(A)+(B)$ | | | |

أ $A$ هو الحدث: «ظهر 6 على المكعّب الأوّل» وَ $B$ هو الحدث: «ظهر 3 على المكعّب الأوّل».

ب $A$ هو الحدث: «ظهر 6 على المكعّب الأوّل»، وَ $B$ هو الحدث: «مجموع ما ظهر على المكعّبين 7».

ج $A$ هو الحدث: «ظهر على المكعّب الأول عدد أقل من 5»، وَ $B$ هو الحدث: «ناتج ضرب ما أظهره المكعّبان أكبر من 5».



**3.** بالاعتماد على النتائج التي حصلت عليها، هل $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ ؟ في أيّ حالة تكون تلك العلاقة صائبة؟

لكي تدرك بوضوحٍ الفرق بين الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية، أمعن النظر في ما يلي:

**حدثان متنافيان**

$A$: «الحصول على عدد زوجيّ»

$P(A)=\frac{3}{6}$

$B$: «الحصول على 3»

$P(B)=\frac{1}{6}$

لاحظ هنا أن $A \cap B \neq \varnothing$ وَ $P(A \cap B)=0$

$P(A \cup B)=\frac{4}{6}$

بما أن الحدثَيْن متنافيان، فإن احتمال الحدث $A \cup B$ يساوي مجموع احتمال الحدثَيْن.

$P(A \cup B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

**حدثان غير متنافيين**

$A$: «الحصول على عدد زوجيّ»

$P(A)=\frac{3}{6}$

$C$: «الحصول على 4»

$P(C)=\frac{1}{6}$

لاحظ هنا أن $A \cap B \neq \varnothing$ وَ $P(A \cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A \cup C)=\frac{3}{6}$

بما أن الحدثَيْن غير متنافيَيْن، فإن علينا طرح احتمال الحدث $A \cap C$ من مجموع احتمال الحدثَيْن.

$P(A \cup C)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

**احتمال الحدث $A \cup B$ Probability of $A \cup B$**

$A$ وَ $B$ حدثان يعودان إلى التجربة العشوائيّة نفسها.

إذا كان $A$ وَ $B$ متنافيَيْن فإن

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ وَ $P(A \cap B)=0$

إذا كان $A$ وَ $B$ غير متنافيَيْن، فإنَّ

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

نقطة مراقبة √ أيٌّ من القاعدتَيْن السابقتَيْن تصلح لكل الأحوال؟ علِّل جوابك.

**مثال 1** تطبيقات إحصاء

في استطلاع للرأي العام حول ضرورة تحديث الأساليب التربوية، تم سؤال عيّنة مؤلّفة من 100 مواطن. يبيّن الجدول المقابل نتائج هذا الاستطلاع:

| | ذكور | إناث | المجموع |
|---|---|---|---|
| مع | 18 | 9 | 27 |
| ضد | 12 | 25 | 37 |
| بلا رأي | 20 | 16 | 36 |
| المجموع | 50 | 50 | 100 |

اختير أحد الذين تم استفتاؤهم بصورة عشوائية. ما احتمال أن يكون من الذين كانوا ضد التحديث أو كانوا بلا رأي؟

**الحل**

إن الحدثين $A$ «ضد» وَ $B$ «بلا رأي» هما حدثان متنافيان. من هنا نجد

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{37}{100}+\frac{36}{100}=\frac{73}{100}=73\%$$

**مثال 2**

**ما احتمال أن يكون الشخص الذي تم اختياره عشوائيًا ذكرًا، أو من الذين كانوا ضد التحديث؟**

**الحل**

إن الحدثَيْن $A$ «ذكر» وَ $B$ «ضد التحديث» حدثان غير متنافيين. إذًا

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{50}{100}+\frac{37}{100}-\frac{12}{100}=\frac{75}{100}=75\%$$

**حاول** ما احتمال أن يكون الشخص الذي تمّ اختياره عشوائيًّا أنثى أو من الذين كانوا بلا رأي؟

## الحدث المتمم Probability of The Complement

إذا رميت قطعة نقود فإن الحدثين «الحصول على الصورة» و«الحصول على الكتابة» متنافيان، كما أن عدم تحقق أحدهما يعني تحقق الآخر. في هذه الحالة نقول أن كلاً من الحدثين هو **متمم** الآخر **Complement**. بصورة عامة، تقول إن الحدث $B$ هو **متمم** الحدث $A$ ، ونكتب ذلك $B=\overline{A}$. إذا كان الحدثان متنافيين وكان أحدهما واقعًا حتمًا.

### احتمال الحدث المتمم Probability of the Complement

إذا كان الحدث $\overline{A}$ متمم الحدث $A$ فإن:

$P(\overline{A})=1-P(A)$ أو $P(A)=1-P(\overline{A})$ أو $P(A)+P(\overline{A})=1$

**تفكير ناقد** ما السبب الذي يسمح لك بكتابة $P(A)+P(B)=1$ عندما يكون الحدثان $A$ وَ $B$ متتامين؟

**مثال 3** تطبيقات تسلية

بالعودة إلى السؤال المطروح في أول الدرس،

**ما احتمال أن يكون المتعلّم الذي اختاره المدير عشوائيًّا، عضوًا في ناديَيْن على الأقلّ؟**

**الحل**

إن الحدث «عضو في ناديَيْن على الأقلّ» هو متمم الحدث «عضو في نادٍ واحد».

فإذا كان $A$ الحدث «عضو في ناديين على الأقل» و $B$ الحدث «عضو في نادٍ واحد فقط» فإن

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{6+8+10}{60}=\frac{36}{60}=0.6=60\%$$

**حـــاولْ** ما احتمال أن يكون المتعلِّم الذي اختاره المدير عشوائيًّا عضوًا في ناديَيْن فقط؟

# التمـــــــاريـــــــن

## التواصل في الرياضيات

1 أعطِ مثالاً على حدثَيْن متنافيَيْن، وآخر على حدثَيْن غير متنافيَيْن.

2 ما الحدث المتمم للحدث: «الحصول على 1 أو 2»، لدى رمي مكعَّب الأعداد؟

3 كيف تحسب احتمال الحدث: «الحصول على عدد فردي أو على 3»، لدى رمي مكعَّب الأعداد؟

## تمارين موجَّهة

**استعمل نتائج الاستطلاع في المثال 1 حول تحديث الأساليب التربوية لحلّ التمرينَيْن 4 وَ5.**

4 ما احتمال أن يكون الشخص الذي تم اختياره عشوائيًّا قد أبدى رأيًا؟

5 ما احتمال أن يكون الشخص الذي تم اختياره عشوائيًّا ذكرًا أو من الذين كانوا مع التحديث؟

6 في ثانوية ما ثلاثة أندية: نادي الشطرنج ويضمّ 24 عضوًا، نادي كرة الطاولة ويضمّ 29 عضوًا، نادي الشعر ويضمّ 28 عضوًا. ينتمي بعض الطلاب إلى أكثر من نادٍ، كما يبيِّن المُخطَّط المقابل. اختار المدير أحد أعضاء هذه الأندية بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون هذا الطالب عضوًا في ناديَيْن على الأكثر؟



## تمارين وتطبيقات

**رمى همّام مكعَّب الأعداد. ما احتمال أن يحصل على:**

7 5 أو 6؟

8 1 أو 4؟

9 عدد زوجي أو 3؟

10 عدد فردي أو 2؟

11 1 أو عدد أصغر من 4؟

12 6 أو عدد أكبر من 2؟

13 عدد غير الواحد؟

14 عدد غير زوجي؟

15 عدد زوجي أو فردي؟

**تطبيـــقات**

**يبيِّن الجدول المقابل النتائج الممكنة لرمي مكعَّبَيْ أعداد من لونين مختلفين. استعمل الجدول، لتحدِّد إن كان الحدثان متنافيَيْن، ولتجد احتمال الحدث المُركَّب في التمارين من 16 إلى 18.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1 ؛1) | (2 ؛1) | (3 ؛1) | (4 ؛1) | (5 ؛1) | (6 ؛1) |
| (1 ؛2) | (2 ؛2) | (3 ؛2) | (4 ؛2) | (5 ؛2) | (6 ؛2) |
| (1 ؛3) | (2 ؛3) | (3 ؛3) | (4 ؛3) | (5 ؛3) | (6 ؛3) |
| (1 ؛4) | (2 ؛4) | (3 ؛4) | (4 ؛4) | (5 ؛4) | (6 ؛4) |
| (1 ؛5) | (2 ؛5) | (3 ؛5) | (4 ؛5) | (5 ؛5) | (6 ؛5) |
| (1 ؛6) | (2 ؛6) | (3 ؛6) | (4 ؛6) | (5 ؛6) | (6 ؛6) |

16 الحصول على مجموع يساوي 2، أو الحصول على مجموع يساوي 4.

17 الحصول على مجموع أكبر من 2، أو الحصول على مجموع أكبر من 6.

18 الحصول على مجموع أقلّ من 3، أو الحصول على مجموع أقلّ من 10.

19 ما عدد الأعداد الصحيحة من 1 إلى 600 التي تقبل القسمة على 2 أو 3؟ ما احتمال أن يكون عددٌ تمّ اختياره عشوائيًّا بين 1 وَ 600 لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3؟

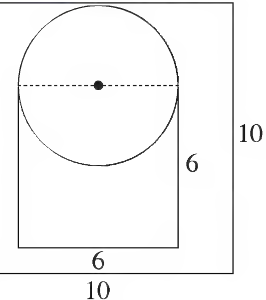
20 ما عدد الأعداد الصحيحة من 1 إلى 3 500 التي تقبل القسمة على 5 أو 7؟ ما احتمال أن يكون عددٌ تمّ اختياره عشوائيًّا بين 1 وَ 3 500 لا يقبل القسمة لا على 5 ولا على 7؟

**في التمارين 21–26، احسب احتمال الحدث المتمم، إذا كان احتمال الحدث:**

21 $\frac{1}{3}$ 22 $\frac{4}{11}$ 23 0.782

24 0.324 25 0 26 1

ربط **هندسة** **رمى آلان سهمه على المربَّع الكبير وأصابه. ما احتمال أن يُصيب السهم**




27 الدائرة؟

28 المربَّع الصغير؟

29 المربَّع الصغير من دون قسمه المشترك مع الدائرة؟

30 القطعة المشتركة بين الدائرة والمربَّع الصغير؟

31 المربَّع الصغير أو الدائرة؟

تطبيقات

32 **مراقبة النوعية** يحتوي صندوق على 35 قطعة غيار للسيّارات، بينها 8 قطع غير صالحة. قام أحد المفتّشين، التابعين لمصلحة مراقبة النوعيَّة، بأخذ 5 قطع لفحصها. ما احتمال أن تكون واحدة من هذه القطع غير صالحة؟

## نظرة إلى الوراء

**حُلَّ بيانيًّا في المستوي الإحداثي.**

33 $3 < x < 8$ 34 $-14 \leq x \leq -2$ 35 $-1 < y < 3$

**حلِّل كلّ حدوديّة.**

36 $x^2 - x - 42$ 37 $3x^2 - 16x - 12$ 38 $81x^2 + 18x + 1$

## نظرة إلى الأمام

39 يحتوي كيس قاتم على 4 كرات حمراء مرقَّمة من 1 إلى 4، وَ 4 كرات زرقاء مرقَّمة من 1 إلى 4، وَ 4 كرات خضراء مرقَّمة من 1 إلى 4. سحب سامي كرة واحدة. ما احتمال أن تحمل الكرة الرقم 1؟ أعاد سامي الكرة المسحوبة إلى الكيس، وسحب هذه المرة أيضًا كرة واحدة فكانت حمراء. هل يتغيَّر احتمال أن تحمل الكرة الرقم 1؟ علِّل جوابك.




**الأهداف**

- يحسب احتمال وقوع حدثَيْن مستقلَّيْن أو أكثر.

# الأحداث المستقلَّة Independent Events



**لماذا**

يمكنك استعمال قانون احتمال الحدثيْن المستقليْن، لتجد العديد من الاحتمالات المهمة. مثال ذلك، احتمال أن يكون طالبان في الصف قد وُلدا في اليوم نفسه.

يضم الصف العاشر 35 طالبًا. ما احتمال أن يكون طالبان على الأقلّ لهما عيد الميلاد نفسه؟

لكي تتمكَّن من الإجابة عن هذا السؤال، لا بدَّ أن تعرف كيف تميِّز بين الأحداث المستقلَّة والأحداث المترابطة، وكيف تحسب احتمال وقوع حدثَيْن مستقلَّيْن. سوف تستكشف ذلك في النشاط التالي.

## النشاط

### استكشاف الأحداث المستقلَّة Exploring Independent Events

رمى كامران قطعة نقود معدنيَّة من فئة الريال، ومكعَّب أعداد.

1. ارمز بالحرف $A$ إلى الحدث «ظهور الصورة» عند رمي قطعة النقود. جِد $P(A)$ .
2. ارمز بالحرف $C$ إلى الحدث «ظهور 3» لدى رمي مكعَّب الأعداد. جِد $P(C)$ .
3. هل يؤثِّر وقوع أحد الحدثَيْن على فرص وقوع الحدث الثاني؟ علِّل جوابك.
4. اكتب على صورة زوج مرتَّب نتيجة رمي قطعة معدنية، ورمي مكعَّب الأعداد معًا. اكتب مثلاً $(A, 3)$ إذا حصل كامران على الصورة والعدد 3. أنشئ لائحة تتضمَّن كل النتائج الممكنة لرمي قطعة معدنية ومكعَّب الأعداد. احسب احتمال وقوع الحدثَيْن $A$ وَ $C$ معًا أي $P(A \cap C)$.
5. احسب $P(A) \times P(C)$ . هل $P(A \cap C)$ يساوي $P(A) \times P(C)$ ؟
6. ارمز بالحرف $D$ إلى الحدث «ظهور عدد زوجي»، لدى رمي مكعَّب الأعداد. احسب $P(D)$ .
7. احسب $P(A \cap D)$ باستعمال اللائحة التي أنشأتها في السؤال 4. هل $P(A \cap D)$ يساوي $P(A) \times P(D)$ ؟
8. ماذا تستنتج عن احتمال وقوع حدثَيْن معًا، إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثِّر في فرص وقوع الآخر؟

**نقطة مراقبة √**

تقول عن عدَّة أحداث إنها **مستقلَّة Independent** إذا كان وقوع أحدها أو عدم وقوعه لا يؤثِّران في فرص وقوع أيٍّ من الأحداث الأخرى. مثال ذلك، رمي مكعبي أعداد.

تقول عن عدة أحداث إنها **مترابطة Dependent** إذا كان وقوع أحدها أو عدم وقوعه يؤثِّران في فرص وقوع حدث أو أكثر من الأحداث الأخرى.

### احتمال حدثَيْن مستقلَّيْن Probability of Independent Events

يكون الحدثان $A$ وَ $B$ مستقلَّيْن إذا، وفقط كان $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ .

ويكون الحدثان **مترابطين** في الحالات الأخرى.

**مثـــــال** 1

لدى خونجه كيسان يحتوي أحدهما على 9 كرات حمراء و 3 كرات خضراء. ويحتوي الآخر على 9 كرات سوداء، و 6 كرات صفراء. سحبت خونجه كرة من كل كيس. **ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الأول خضراء والكرة المسحوبة من الثاني سوداء؟**



الحـل

**الكيس الأول**

$P(G)=\frac{3}{3+9}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

حيث $G$ الحدث «كرة خضراء»

**الكيس الثاني**

$P(B)=\frac{9}{6+9}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

حيث $B$ الحدث «كرة سوداء»

بما أن الحدثين مستقلان فإن $P(G\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الأول خضراء والكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء، هو $\frac{3}{20}=0.15=15\%$ .

**مثـــــال** 2

يختار طلاب كلّ من الشعبتَيْن الأولى والثانية في الصف العاشر مندوبًا يتحدَّث باسمهم في حفل نهاية العام الدراسي. فإذا كان طلال من الشعبة الأولى التي تعدّ 18 طالبًا، ومحمد من الشعبة الثانية التي تعدّ 20 طالبًا، **فما احتمال أن يكونا المندوبَيْن؟**



الحـل

ارمز بالحرف $M$ إلى الحدث: «محمد مندوب»، وبالحرف $T$ إلى الحدث: «طلال مندوب».

$P(M)=\frac{1}{18}$ وَ $P(T)=\frac{1}{20}$ .

بما أن الحدثَيْن $M$ وَ $T$ مستقلاّن، فإن $P(M\cap T)=P(M)\times P(T)=\frac{1}{18}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{360}\approx 0.03\%$ .

يمكنك تعميم قانون احتمال حدثَيْن مستقلَّيْن، ليشمل احتمال عدَّة أحداث مستقلَّة.
فاحتمال الحصول على عدد زوجيٍّ، عند رمي مكعَّب أعداد، ثلاث مرّات متتالية، هو

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ .

**تفكير ناقد** ما احتمال أن تحصل على الصورة 4 مرات لدى رميك قطعة نقد معدني 4 مرّات متتالية؟
اكتب قانونًا لحساب احتمال وقوع $n$ حدثًا معًا، عندما تكون هذه الأحداث مستقلَّة.

**مثـــــال** 3 بالعودة إلى المسألة المطروحة في أول الدرس،

**تطبيـــقات تسلية**

**ما احتمال أن يكون طالبان على الأقلّ لهما عيد الميلاد نفسه؟**

الحـل

**انظر إلى الأمر من زاوية مختلفة.** استعمل الحدث المتمم، افترض أن السنة تتكون من 365 يومًا (تجاهل السنة الكبيسة). ليكن $A$ الحدث «يوجد طالبان على الأقل لهما عيد الميلاد نفسه»، وَ $B$ الحدث المتمم «لا يوجد طالبان لهما عيد الميلاد نفسه».

لتحسب $P(B)$ ، تستطيع أن تكتب:

قد يكون يوم ولادة الطالب الأول أيّ يوم من أيام السنة : $\frac{365}{365}$ .

قد يكون يوم ولادة الطالب الثاني أيّ يوم من 364 يومًا : $\frac{364}{365}$ .

قد يكون يوم ولادة الطالب الثالث أيّ يوم من 363 يومًا : $\frac{363}{365}$ .

هكذا دواليك حتى الطالب الخامس والثلاثين.

$$P(B)=\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\ldots\times\frac{331}{365}\approx 0.19$$

استعمل قانون احتمال الحدث المتمم لحساب احتمال أن يكون طالبان على الأقلّ لهما عيد الميلاد نفسه.

$$P(B)=1-P(B)=1-0.19=0.81$$

إذاً، احتمال أن يكون طالبان على الأقل، لهما عيد الميلاد نفسه. يقارب $81\%$.

**حـــاولْ** ما احتمال أن يكون طالبان على الأقل لهما عيد الميلاد نفسه ما بين 7 طلاب؟

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

1. أعطِ مثالاً على حدثَيْن مستقلَّيْن، وآخر على حدثَيْن مترابطَيْن.
2. كيف تحسب احتمال وقوع حدثَيْن مستقلَّيْن معًا؟
3. ما الفرق بين حدثَيْن متنافيَيْن وحدثَيْن مستقلَّيْن. أعطِ أمثلة على ذلك.

## تمارين موجَّهة

4. لدى دارا كيسان. يحتوي الأول على 5 كرات سوداء، و 5 كرات بيضاء، ويحتوي الثاني على كرة خضراء واحدة، وكرتَيْن حمراوَيْن. سحب دارا كرة من كل كيس. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الأول سوداء، والمسحوبة من الثاني خضراء؟
5. تختار طالبات كل من الشعبتَيْن $A$ و $B$ في الصف العاشر مندوبة تتحدَّث باسمهن في حفل نهاية العام الدراسي. فإذا كانت مها في الشعبة $A$ التي تعدّ 22 طالبة، ودنيا في الشعبة $B$ التي تعدّ 19 طالبة، فما احتمال أن تكونا المندوبتَيْن؟

**6** يضم نادي الشعر في إحدى الثانويات 40 طالبًا. ما احتمال أن يكون اثنان من الطلاب على الأقلّ من أعضاء النادي لهما عيد الميلاد نفسه؟

## تمارين وتطبيقات

**الأحداث $A, B, C, D$ مستقلّة. $P(D)=0.1, P(C)=0.75, P(B)=0.25, P(A)=0.5$**

**احسب.**

**7** $P(A \cap B)$ **8** $P(A \cap C)$ **9** $P(C \cap B)$

**10** $P(C \cap D)$ **11** $P(A \cap D)$ **12** $P(B \cap D)$

**رميت مكعّب أعداد. هل الحدثان مُستقلاّن أم مترابطان؟**

**13** «الحصول على عدد زوجي»؛ «الحصول على 2 أو 4».

**14** «الحصول على عدد زوجي»؛ «الحصول على 1 أو 4».

**15** «الحصول على 6»؛ «الحصول على عدد أصغر من 5».

**16** «الحصول على 4»؛ «الحصول على عدد أكبر من 3».

**انظر إلى الدولاب المؤشّر المُقابل، حيث تتساوى القطاعات الثمانية في المساحة، وتحمل الأعداد من 1 إلى 8. احسب احتمال كلّ حدث لدى تحريك الدولاب ثلاث مرّات.**

**17** توقّف المؤشّر في كل مرّة أمام العدد 3 أو أمام عدد أكبر من 5.

**18** توقّف المؤشّر في كل مرّة أمام العدد 4 أو أمام عدد أصغر من 6.

**19** توقّف المؤشّر مرة واحدة أمام العدد 5 أو أمام عدد أصغر من 7.

**20** توقّف المؤشّر مرة واحدة أمام العدد 8، أو أمام عدد أكبر من 3.

**21** إذا كان احتمال أن يحضر كامران الاحتفال 80% واحتمال هلّو 95%. فما احتمال حضورهما الاحتفال معًا، علمًا بأن حضور أحدهما لا يؤثّر في حضور الآخر أو غيابه؟

**22** يحتوي كيس على 15 كرة مرقّمة من 1 إلى 15. سحبت دعد كرة وأعادتها إلى الكيس، ثم سحبت كرة، للمرة الثانية.

**أ** ما احتمال أن تحمل الكرة التي سحبتها دعد في المرّتين العدد 8.

**ب** ما احتمال أن تسحب باوان الكرة التي تحمل العدد 8 مرّة واحدة؟ (مساعدة: احسب احتمال أن تكون الكرة التي تحمل الرقم 8 سُحبت في المرّة الأولى أو في المرّة الثانية،وليس في المرّتين معًا).

**23** **طيران** تُبيِّن سجلاّت إحدى شركات الطيران أن رحلتها من تاران إلى هولير تصل في موعدها في 92% من المرّات، وأن رحلتها من هولير إلى عمان تغادر في موعدها في 97% من المرّات. ينوي آشتي السفر من تاران إلى عمان مرورًا بهولير. ما احتمال أن تصل الطائرة التي تنقله إلى هولير في موعدها، ثم تغادر إلى عمان في موعدها؟



## نظرة إلى الوراء

**اكتب المقدار على أبسط صورة، علمًا بأن الصفر قيمة ممنوعة على المتغيِّرين $x$ وَ $y$.**

**24** $(x^{-2}y^{3})^{2}(3xy^{0})^{3}$

**25** $(2x^{2}y^{-2})^{-3}(-x^{2}y)^{3}$

**26** $\left(\dfrac{3x^{2}y^{-2}}{5x^{2}y}\right)^{2}$

## نظرة إلى الأمام

**27** مع نياز 3 قطع نقود معدنية متماثلة. رمت نياز القطع الثلاث. ما احتمال أن تحصل على 3 صور في كل حالة من الحالات التالية:

أ نُقشت صورة واحدة على وجه واحد من وجهَي كل قطعة (القطع الثلاث، في هذه الحالة، عادية).

ب قطعة واحدة من القطع الثلاث تحمل الصورة على كل وجه، والباقيتان عاديتان.

ج قطعتان تحمل كل منهما الصورة على كل وجه، والثالثة قطعة عادية.




# قياسات التشتُّت Measurments of Dispersion



**لماذا؟**

يمكنك استعمال قياسات التشتُّت لمقارنة مجموعتيْ معطيات متشابهة كالمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينتَيْن.

**الأهداف**

- يحسب قياسات التشتُّت، كالمدى والانحراف الوسطي والتباين والانحراف المعياري، ويستعملها.

## مفهوم التشتُّت Dispersion Concept

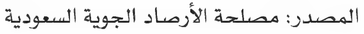



يبيِّن الجدولان المقابلان متوسِّط درجات الحرارة على مدى 12 شهرًا في مدينتَي الرياض وجدَّة.

يبلغ متوسِّط درجات الحرارة في الجدْول الأوَّل 27، بينما يبلغ متوسِّط درجات الحرارة في الجدول الثاني 28.51. إذا مثَّلنا قيَم الجدْولَيْن على محور الأعداد نجد:

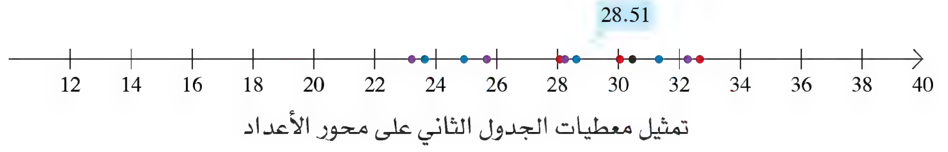
| متوسِّط درجات الحرارة لمدينة الرياض | |
|---|---|
| كانون الثاني | 16.63 |
| شباط | 17.8 |
| آذار | 22.94 |
| نيسان | 26.37 |
| مايس | 32.61 |
| حزيران | 35.62 |
| تموز | 37.06 |
| آب | 36.81 |
| أيلول | 33.06 |
| تشرين الأول | 28.34 |
| تشرين الثاني | 22.5 |
| كانون الأول | 14.35 |

| متوسِّط درجات الحرارة لمدينة جدَّة | |
|---|---|
| كانون الثاني | 23.32 |
| شباط | 23.77 |
| آذار | 25.8 |
| نيسان | 28.08 |
| مايس | 30.51 |
| حزيران | 31.25 |
| تموز | 32.7 |
| آب | 32.25 |
| أيلول | 31.27 |
| تشرين الأول | 30.1 |
| تشرين الثاني | 28.2 |
| كانون الأول | 24.9 |


المصدر: مصلحة الأرصاد الجوية السعودية




تمثيل معطيات الجدول الأوَّل على محوَر الأعداد




تمثيل معطيات الجدول الثاني على محور الأعداد

يُمثِّل متوسِّط الجدول الثاني (28.51) درجات الحرارة في مدينة جدَّة بشكل أفضل من تمثيل

متوسط الجدول الأول (27) لدرجات الحرارة في مدينة الرياض. فدرجات الحرارة في مدينة جدَّة قريبة من متوسِّطها على عكس درجات الحرارة في مدينة الرياض. تعبِّر عن ذلك بالقول إن مجموعة قيَم الجدول الأول أكثر **تشتُّتًا** من قيَم الجدول الثاني.

## مقاييس التشتُّت Measures of Dispresion

يستعمل الإحصائيّون عددًا من القياسات للتعبير عن مدى تشتُّت مجموعة قيَم.

**المدى Range**: هو الفرق بين أكبر قيمة **Maximum** وأصغر قيمة **Minimum** في المجموعة.

المدى = القيمة الكبرى − القيمة الصغرى

**تفكير ناقد** هل ترى أن المدى يعبِّر عن تشتُّت مجموعة قيَم؟

**الانحراف الوسطي Mean Deviation** هو متوسِّط ابتعاد قيَم المجموعة عن متوسِّطها. لكي نحسب الانحراف الوسطي لمجموعة $x_1, x_2 ..., x_n$ من القيَم، نحسب انحراف كل منها عن المتوسِّط $\bar{x}$ أي $|x_1-\bar{x}|, |x_2-\bar{x}|, ..., |x_n-\bar{x}|$ ثم نحسب متوسِّط تلك الانحرافات.

الانحراف الوسطي $=\frac{1}{n}\left(|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+ ... +|x_n-\bar{x}|\right)$ .

**تفكير ناقد** لماذا يستعمل الإحصائيّون المقدار $|x_n-\bar{x}|$ لحساب انحراف القيمة $x_n$ عن المتوسِّط $\bar{x}$، ولا يستعملون $x_n-\bar{x}$ بدلاً منه؟

**مثـــــال 1**

**تطبيـــقات**
**صناعة**

أجرت إحدى الشركات، التي تصنع عجلات السيارات، 5 تجارب على نوعَيْن من العجلات. وسجَّلت عدد الكيلومترات التي خدمت فيها العجلات قبل أن تفقد صلاحيَّتها. يبيِّن الجدول أدناه نتائج هذه التجارب، بآلاف الكيلومترات.

| العجلة 1 | 66 | 43 | 37 | 50 | 54 |
|---|---|---|---|---|---|
| العجلة 2 | 54 | 49 | 47 | 48 | 52 |

**أ** **احسب المدى والانحراف الوسطي لعدد الكيلومترات التي خدم فيها كل نوع من العجلات.**

**ب** **علامَ تدلّ هذه القياسات بشأن كل نوع من العجلات.**

الحـل

**أ**

**العجلة 1**

المدى: $66-37=29$، أي 29 000 Km.

لكي تحسب الانحراف الوسطي، ابدأ بحساب المتوسِّط:

$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$ .

احسب بعد ذلك انحراف كل قيمة عن المتوسِّط.

لأجل ذلك، أنشئ الجدول التالي:

**العجلة 2**

المدى: $54-47=7$ ، أي 7 000 Km.

لكي تحسب الانحراف الوسطي، ابدأ بحساب المتوسِّط:

$\bar{x}=\frac{54+49+47+48+52}{5}=50$.

احسب بعد ذلك انحراف كل قيمة عن المتوسِّط.

لأجل ذلك، أنشئ الجدول التالي:

| $x_n$ | $\lvert x_n-\bar{x}\rvert$ |
|---|---|
| 66 | 16 |
| 43 | 7 |
| 37 | 13 |
| 50 | 0 |
| 54 | 4 |

بعد ذلك، احسب متوسِّط الانحرافات،

تحصل على:

الانحراف الوسطي: $\frac{16+7+13+0+4}{5}=8$

أي 8 000km.

| $x_n$ | $\lvert x_n-\bar{x}\rvert$ |
|---|---|
| 54 | 4 |
| 49 | 1 |
| 47 | 3 |
| 48 | 2 |
| 52 | 2 |

بعد ذلك، احسب متوسِّط الانحرافات،

تحصل على:

الانحراف الوسطي: $\frac{4+1+3+2+2}{5}=2.4$،

أي 2 400km.

**ب** لاحظ أن الانحراف الوسطي للعجلة 2 أقلّ من الانحراف الوسطي للعجلة 1، ما يسمح لك بالقول إن متوسِّط معطيات العجلة 2 أكثر ثقة. هذا يعني أن المسافة المعبَّر عنها بالمتوسِّط للعجلة 2، هي أكثر وثوقًا.

**حـــاولْ** احسب المدى والانحراف الوسطي لمعطيات العجلة 3، وقارنها مع القياسات العائدة إلى العجلتَيْن السابقتَيْن.

| العجلة 3 | 64 | 52 | 50 | 49 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|

**نقطة مراقبة √** هل يمكن أن يكون لمجوعتَيْ معطياتٍ المدى نفسُه دون أن يكون لهما الانحراف الوسطي نفسه؟ علِّلْ إجابتك بمثال.

**التبايُن Variance والانحراف المعياري Standard Deviation** مقياسان للتشتُّت يُستعملان في مقارنة المعطيات وتحليلها.

$\sigma$ (إقرأ سيغما) حرف يوناني

**التبايُن** $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

**الانحراف المعياري** $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$.

## مثـــــال 2

احسب الانحراف المعياري لمسافات العجلتَيْن في المثال السابق.



**تطبيـــقات صناعة**

الحـــل

**العجلة 1**

$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$

أنشئ الجدول التالي لتنظيم ما تحسبه:

| $x_n$ | $x_n-\bar{x}$ | $\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$ |
|---|---|---|
| 66 | 16 | 256 |
| 43 | −7 | 49 |
| 37 | −13 | 169 |
| 50 | 0 | 0 |
| 54 | 4 | 16 |
| المجموع | 0 | 490 |

**العجلة 2**

$\bar{x}=\frac{54+49+47+48+52}{5}=50$

أنشئ الجدول التالي لتنظيم ما تحسبه:

| $x_n$ | $x_n-\bar{x}$ | $\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$ |
|---|---|---|
| 54 | 4 | 16 |
| 49 | −1 | 1 |
| 47 | −3 | 9 |
| 48 | −2 | 4 |
| 52 | 2 | 4 |
| المجموع | 0 | 34 |

التباين: $\sigma^2 = \frac{490}{5} = 98$

الانحراف المعياري: $\sigma \approx 9.9$ أي 9 900km.

التباين: $\sigma^2 = \frac{34}{5} = 6.8$

الانحراف المعياري: $\sigma \approx 2.6$ أي 2 600km.

هذه النتائج تؤكّد ما توصّلتَ إليه في المثال السابق، حيث أن الانحراف المعياري العائد إلى العجلة 2 أقلّ من الانحراف المعياري العائد إلى العجلة 1.

**حــــاولْ** كم يبلغ الانحراف المعياري للعجلة 3.

**نقطة مراقبة √** إذا كان الانحراف المعياري لعجلة رابعة يساوي 1 500km، فماذا تقول عن هذه العجلة مقارنة بالعجلتَيْن 1 وَ2؟

**تفكير ناقد** أيّ القياسَيْن تراه أكثر استعمالاً: التباين أم الانحراف المعياري؟ علِّل إجابتك؟

بالعودة إلى معدَّلات درجات الحرارة في مدينتَي الرياض وجدَّة، يُبيِّن الجدول أدناه قياسات التشتُّت لمعدَّلات درجات الحرارة في هاتَيْن المدينتَيْن.

| القياس | الرياض | جدّة |
|---|---|---|
| المدى | 22.71 | 9.38 |
| الانحراف الوسطي | 6.91 | 2.83 |
| التباين | 66.46 | 11.2 |
| الانحراف المعياري | 8.15 | 3.35 |




هذا يعني أن معدَّلات درجة الحرارة أقلّ تشتُّتًا في جدّة منها في الرياض، لأن الانحراف المعياري العائد إلى المدينة الأولى أقلّ من الانحراف المعياري العائد إلى المدينة الثانية.

## التمـــــاريـــــن

### التواصل في الرياضيات

1 لِمَ يكون كلٌّ من الانحراف الوسطي والانحراف المعياري عددًا غير سالب؟

2 أوضح العلاقة القائمة بين التباين والانحراف المعياري. هل يكون الانحراف المعياري دائمًا أقلّ من التباين؟ علِّل إجابتك.

3 لِمَ يعبِّر كل من الانحراف الوسطي والانحراف المعياري عن التشتُّت أكثر من تعبير المدى عنه؟

## تمارين موجَّهة

**تطبيقات**

4 **امتحانات** يبيِّن الجدول المقابل درجات طالبَيْن في 5 امتحانات. احسب المدى والانحراف الوسطي لعلاماتِ كلٍّ من الطالبين، وأوضح ما تشير إليه هذه القياسات.

| آري | توانا |
|---|---|
| 81 | 98 |
| 84 | 68 |
| 88 | 99 |
| 82 | 59 |
| 85 | 96 |

5 احسب الانحراف المعياري لعلامات كلٍّ من الطالبين.

## تمارين وتطبيقات

**احسب المدى والانحراف الوسطي.**

6 8; 10; 3; 9; 10

7 1; 2; 4; 2; 6

8 31; 103; 34; 98; 107; 23

9 32; 23; 68; 74; 26; 93

10 13.2; 9.4; 7.3; 12.3; 8.6; 7.6

11 11; 1; 14.2; 8.4; 12.2; 15.2; 10.9

12 −1.22; 4.35; −2.42; 2.33; 4.66

13 8.72; 7.43; −2.92;−3.56; 5.78

**احسب التباين والانحراف المعياري.**

14 9; 10; 10; 8; 7; 11; 12; 9

15 8.1; 10.3; 3.4; 9.8; 10.7

16 −3; 2; −5; 4; −2; 8; 9;−1

17 2; 4; −8; 8; 7; −2;−4; 3; 7

**احسب الانحراف الوسطي والانحراف المعياري. أي قياس من القياسَيْن أقلّ تأثّرًا بالقيمة المتطرِّفة؟**

18 20; 30; 40; 500

19 0; 500; 510; 520

**تحدٍّ**

20 أنشئ مجموعتَيْ قيَم لهما المدى نفسه، وانحرافاهما المعياريّان مختلفان.

21 هل يمكن للانحراف المعياري لمجموعة قيَم أن يساوي 0؟ إذا كان هذا ممكنًا، فحدِّد شروط تحقُّقه. استعمل مثالاً في شرحك.

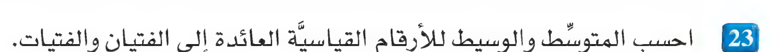
**ربط**

22 **تحويل** ما الذي يحدث للانحراف المعياري لمجموعة قيَم إذا أضفنا عددًا معيَّنًا $a$ إلى جميع قيَم المجموعة؟ ما الذي يحدث للانحراف المعياري لمجموعة قيَم إذا ضربنا جميع قيَم المجموعة في عدد معيَّن $a$ مختلف عن 0؟



**رياضة** يبيِّن الجدول التالي الأرقام القياسية (بالدقائق والثواني والأجزاء من مئة من الثانية) للفتيان والفتيات الذين شاركوا في سباقات الألف متر للتزلج على الجليد.

| | 1976 | 1980 | 1984 | 1988 | 1992 | 1994 | 1998 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| فتيان | 1:59.38 | 1:55.44 | 1:58.36 | 1:52.06 | 1:54.81 | 1:51.29 | 1:47.87 |
| فتيات | 2:16.58 | 2:10.95 | 2:03.42 | 2:00.68 | 2:05.87 | 2:02.19 | 1:57.58 |



**23** احسب المتوسِّط والوسيط للأرقام القياسيَّة العائدة إلى الفتيان والفتيات.

**24** احسب المدى والانحراف الوسطي للفتيان والفتيات. ماذا تقول هذه القياسات عن الأرقام القياسية للفتيان والفتيات؟

**25** احسب الانحراف المعياري للفتيان والفتيات. ماذا تقول هذه القياسات عن الأرقام القياسية للفتيان والفتيات؟

## نظرة إلى الوراء

**احسب جذرَيْ كل معادلة تربيعيَّة باستعمال القانون، وأعطِ الجواب مقرَّبًا إلى أقرب عُشر.**

**26** $3x^2+10x+1=0$

**27** $2x^2+12x-4=0$

## نظرة إلى الأمام

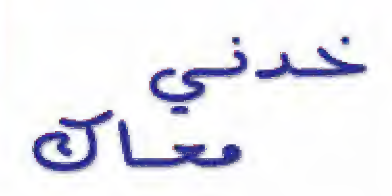
**28** غالبًا ما يلجأ الإحصائيّون إلى استعمال عيِّنة، لدراسة مجموعة قيَم تضمّ عددًا كبيرًا منها. ينطلقون من القياسات الإحصائية للعيِّنة لكي يقدِّروا القياسات الإحصائيَّة للمجموعة ككل. فهم يعتبرون أن متوسِّط العيِّنة يعبِّر عن متوسِّط المجموعة. أما بشأن الانحراف المعياري، فإنهم يحسبون تبايُن العيِّنة بقانون يختلف قليلاً عن قانون حساب التبايُن في المجموعة ككلّ. إنهم يستعملون القانون التالي:

تبايُن العيِّنة $= \frac{1}{(n-1)}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2\right)$ .

أ احسب التبايُن والانحراف المعياري للعيِّنة التالية: 12 ;5 ;16 ;18 ;15

ب بغية حساب متوسِّط عدد السيّارات لدى عائلة واحدة، قام المجلس البلديّ لإحدى المدن باستعمال عيِّنة من 10 عائلات جرى اختيارها بشكل عشوائي. وقد توصَّل استطلاع هذه العيِّنة إلى الأعداد التالية: 4 ;3 ;1 ;2 ;4 ;1 ;1 ;2 ;3 ;2
قدِّر متوسط عدد السيارات لدى عائلة واحدة وقدِّر الانحراف المعياري.






**من أهم القضايا التي تواجه شركات الطيران، مسألة التنظيم الفعّال لعملية تسجيل المسافرين وأمتعتهم. للوصول إلى أفضل الحلول لمثل هذه المسألة، يلجأ المخطّطون في هذه الشركات إلى القيام بعمليات إحصاء ودراسة النتائج وإخضاعها للعمليات الرياضية، ومنها حسابات الاحتمال. سوف تقوم خلال هذا المشروع بثلاثة نشاطات تدور حول مسألة تسجيل المسافرين.**

## النشاط 1

يرغب إحصائيّو الشركة في دراسة الوقت الذي تستغرقه عملية تسجيل المسافر. تجدر الإشارة هنا إلى أن هذا الوقت يتغيَّر من مسافر إلى آخر، بسبب اختلاف أوضاع المسافرين. بدأ الإحصائيّون دراستهم ببحث عن الوقت الذي يستغرقه تسجيل كل مسافر من المسافرين الخمسين، الذين وصلوا إلى مكتب التسجيل بين الساعة 1:00 والساعة 1:10. واستخلص الإحصائيّون من هذا البحث الاحتمالات التالية:

| الوقت المُستغرق بالثواني | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الاحتمال | 0.052 | 0.132 | 0.158 | 0.135 | 0.123 | 0.104 |

| الوقت المُستغرق | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الاحتمال | 0.058 | 0.034 | 0.116 | 0.050 | 0.026 | 0.012 |

حيث تم تقريب الأوقات إلى أقرب مُضاعف لعشر ثوانٍ، والاحتمالات إلى أقرب جزء من ألف.

تقرأ هذا الجدول بالقول إن احتمال أن يستغرق تسجيل المسافر 10 ثوانٍ هو 0.052 واحتمال أن يستغرق 20 ثانية هو 0.132 ...

يرغب الإحصائيّون أن يحدِّدوا احتمال أن يستغرق تسجيل 50 مسافرًا أكثر من 50دقيقة. الطريقة الأولى لتحديد ذلك تقوم على تسجيل الأوقات التي استغرقها تسجيل عدد كبير من المسافرين واستخلاص النتيجة. إلا أن هذه الطريقة تتطلَّب وقتًا وجهدًا وتكاليف. لذلك لجأوا إلى **المحاكاة Simulation**. كيف قاموا بهذه المحاكاة؟

انطلقوا من الدقّة التي تم بها احتساب احتمالات الجدول السابق. بما أن الدقّة كانت بالتقريب إلى أقرب جزء من ألف، فقد قرَّروا أن يحاكوا وصول 1000 مسافر. بغية ذلك، قاموا بتجميع الأعداد من 1 إلى 1000 في **فئات**، وفقًا لاحتمالات الجدول السابق. فاعتبروا أن الأعداد من 1 إلى 52 تقابل الاحتمال 0.052، وأن الأعداد من 53 إلى 184 (132 مسافرًا) تقابل الاحتمال 0.132 وهكذا...



أكمل الجدول المقابل.

| الوقت | الاحتمال | ترقيم المسافرين |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 000 |
| 10 | 0.052 | 052–001 |
| 20 | 0.132 | 184–053 |
| 30 | 0.158 | 342–185 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

كيف تستعمل هذا الجدول؟ ابدأ بالطلب إلى الحاسبة البيانية أن تعطيك عددًا عشوائيًّا يقع بين 1 وَ1000، بما فيها هذان العددان. اعتبر أن هذا العدد العشوائيّ يمثّل وصول مسافر إلى مكتب التسجيل، واستعمل الجدول السابق لتحديد الوقت الذي يستغرقه تسجيل هذا المسافر. فإذا كان العدد العشوائيّ هو 122 مثلاً، اعتبر أن الوقت الذي يستغرقه تسجيل هذا المسافر، هو 20 ثانية، لأن العدد 122 يقع بين العددَيْن 53 وَ184 في العمود الثالث.

## النشـاط 2

ستقوم بمحاكاة وصول 50 مسافرًا إلى مكتب التسجيل بين الساعة 1:00 والساعة 1:10، بالطلب إلى الحاسبة أن تعطيك 50 عددًا عشوائيًّا؛ ثم تنظّم ما تحصل عليه في الجدول المقابل:

| المسافر | العدد العشوائي الذي يمثّل المسافر | الوقت |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| ⋮ | | |
| 49 | | |
| 50 | | |

1. استعمل الحاسبة البيانية للحصول على 50 عددًا عشوائيًّا تقع بين 1 وَ1000، بما فيها هذان العددان.
2. أكمل العمود الثاني من الجدول.
3. استعمل الجدول الذي أنشأته في النشاط الأول، لإكمال العمود الثالث. مثال: إذا كان العدد العشوائي 179، فإن الوقت الواجب تدوينه في العمود الثالث مقابل 179 هو 20 ثانية.

## النشـاط 3

1. أعدّ محاكاة وصول 50 مسافرًا إلى مكتب التسجيل 10 مرّات. أعطِ تقديرًا لاحتمال أن يستغرق تسجيل المسافرين الخمسين أكثر من 50 دقيقة.
2. لاحظتَ، من خلال عملك في هذا المشروع، أن معالجة شؤون تسجيل المسافرين ليست بالأمر السهل، ولا هي بالعلم الثابت. هل تستطيع، انطلاقًا من عملك في هذا المشروع، أن تعطي مثالاً على حالة أخرى يمكن فيها استعمال المحاكاة لتحديد الاحتمالات؟ أوضح ذلك.



# مراجعة

**1** سحب جميل كرة من كيس يحتوي على 3 كرات حمراء وَ5 كرات زرقاء. ما احتمال أن تكون الكرة حمراء؟

**2** سحبت منى كرة من كيس يحتوي على 4 كرات حمراء، وَ10 كرات سوداء. ما احتمال أن تكون الكرة حمراء؟

**يبدأ الاحتفال في وقت يقع بين 8:00 ب.ظ. وَ 8:30 ب.ظ. احسب احتمال أن يصل أول المدعوّين بين:**

**3** 8:00 ب.ظ. وَ8:05 ب.ظ.؟

**4** 8:12 ب.ظ. وَ8:18 ب.ظ.؟

**5** 8:21 ب.ظ. وَ8:24 ب.ظ.؟

**6** كم كلمة سرّ من 4 أحرف يمكنك أن تشكّل، باستعمال 5 أحرف من حروف الأبجدية دون تكرار؟

**7** كم كلمة سرّ من 4 أحرف يمكنك أن تشكّل، باستعمال 5 أحرف من حروف الأبجدية مع إمكانيّة التكرار.

**8** بكم طريقة يمكنك أن ترتّب 6 مكعّبات مختلفة الألوان في صف واحد؟

**9** بكم طريقة يمكنك أن تختار كتابَيْن من 5 كتب وترتّبها على الرف؟

**10** بكم طريقة يمكنك أن توزّع 5 طلاّب حول طاولة مستديرة؟

**11** بكم طريقة يستطيع 8 موظّفين الجلوس إلى طاولة مستديرة؟

**12** بكم طريقة يمكنك أن تختار كتابَيْن من 10 كتب؟

**رمى هشام مكعّب الأعداد. احسب احتمال كل حدث:**

**13** الحصول على 4 أو 7.

**14** الحصول على 1 أو 6.

**15** الحصول على عدد فرديّ، أو على عدد أكبر من 4.

**16** الحصول على عدد زوجيّ أو على عدد أقلّ من 4.

**17** الحصول على عدد أكبر من 1.

**18** الحصول على عدد أكبر من 2.

**احسب احتمال الحدث.**

**19** ولادة 3 صبيان على التوالي في مستشفى التوليد.

**20** الحصول على عددَيْن زوجيَّيْن لدى رمي مكعَّبَيْ أعداد.

**21** احسب المدى والتباين والانحراف الوسطي والانحراف المعياري لمجموعة القيَم التالية: 3، 2، 3، 5، 7، 5.

**احسب المدى والانحراف الوسطي لكل مجموعة قيَم.**

**22** 14; 11; 8; 14; 4; 12; 10; 6 .

**23** 20; 22; 15; 14; 13; 17 .

**24** 2; −3; 9; −7; 6; 3 .

**25** 21; 24; −22; 13; 12; −8; 4 .

**احسب التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة قيَم.**

**26** 20; 19; 16; 14; 13; 11; 18; 15; 12; 10 .

**27** 160; 80; 180; 130; 140; 100 .

**28** 14; 13; 11; 9; 7; 14; 12; 9; 8 .

**29** 2; 20; 18; 12; 6; 4; 3; 2; 12; 4; 3 .

6

# اختبار الفصل

**حدِّد احتمال كل حدث.**

1 سحْب كرة حمراء من كيس يحتوي على 4 كرات حمراء وَ 4 كرات خضراء وَ 4 كرات زرقاء وَ 40 كرة صفراء، لدى سحْب كرة واحدة من الكيس.

2 سحْب كرة خضراء من كيس يحتوي على 8 كرات خضراء وَ 6 كرات حمراء، لدى سحب كرة واحدة.

3 الحصول على عدد فرديّ لدى رمي مكعَّب الأعداد.

4 **ترقيم** يتألَّف ترقيم بطاقة إجازة الصيد من حرفَيْن مختلفَيْن من الحروف العربية الثمانية والعشرين، يليها 8 أرقام مختلفة من الأرقام العشرة المعتمدة. ما عدد الترقيمات الممكنة؟

**احسب قيمة كل مقدار:**

5 $12! - 7!$

6 ${}_8P_3$

7 كم طريقة يُمكن بها اختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سرّ من لجنة تتألَّف من 24 عضوًا؟

8 ما عدد تباديل الأحرف في كلمة «كوردستان»؟

9 **رياضة** كم طريقة يُمكنك فيها توزيع 3 كرات من ألوان مختلفة على 32 صندوقًا مرقَّمًا؟

**احسب كل مقدار:**

10 ${}_8C_3$

11 ${}_8C_8$

12 $\frac{{}_8C_5}{{}_5C_3 \times {}_5C_2}$

13 **تجارة** يُقدِّم مطعم السعادة وجبة عشاء مؤلَّفة من 3 أطباق يختارها الزبون من 7 أطباق. كم خيارًا لدى الزبون؟

**سحب بتروس كرة من كيس يحتوي على 12 كرة متشابهة تحمل الأعداد من 1 إلى 12. حدِّد احتمال أن تحمل الكرة المسحوبة:**

14 العدد 7 أو عددًا زوجيًّا.

15 عددًا أوليًّا أو عددًا مُضاعَفًا للعدد 4.

16 عددًا فرديًّاأو عددًا مُضاعَفًا للعدد 5.

17 عددًا أكبر من 8 أو عددًا مُضاعفًا للعدد 3.

18 عددًا زوجيًّا أو عددًا أصغر من 6.

**حدِّد احتمال كل حدث.**

19 رمى سيروان قطعة نقود معدنيَّة ومكعّب أعداد. الحدث هو الحصول على النخلة والعدد 5.

20 اختارت وكالة الفضاء موعدًا لإطلاق مركبة في الأسبوع المقبل. الحدث هو أن يكون هذا الموعد يوم الثلاثاء، بين الساعة 1 ق.ظ. والساعة 2 ق.ظ.

**حدِّد القيمة الصغرى والقيمة الكبرى والمدى لكل مجموعة معطيات.**

21 34; 65; 32; 19; 28; 23; 45; 59; 24; 18 . 34; 41; 19; 23; 54; 42; 27; 25; 39

22 . 7; 5; 8; 2; 6; 2; 5; 6; 1; 4; 9; 8; 5; 3

**حدِّد المدى والانحراف الوسطي لكل مجموعة قيَم.**

23 . 13; 11; 9; 7; 5; 3

24 . 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

**حدِّد التبايُن والانحراف المعياري لكل مجموعة قيَم.**

25 . 13; 11; 9; 7; 5; 3

26 . 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

27 ماذا تقول عن مجموعة قيَم انحرافها المعياري 0؟

6

# اختبار تراكمي

**1** أيٌّ مما يلي يشكِّل حلاً للنظام $\begin{cases} 2y+x \le 6 \\ y-3x \ge 4 \end{cases}$؟

أ $(0,5)$ ب $(-1,2)$
ج $(1,-1)$ د $(0,0)$

**2** حُلّ المُتباينة $2(x+2)-7<8x+15$.

أ $x>-3$ ب $x<-3$
ج $x>2$ د $x<2$

**3** ماذا تضيف إلى $x^2-12x$ لإكمال المربَّع؟

أ $6$ ب $-6$ ج $36$ د $-36$

**4** أي تعبير يصف العلاقة بين المستقيمَيْن $y=\frac{1}{2}x$ وَ $y=-2x-3$؟

أ أفقيّان ب عموديّان
ج متعامدان د متوازيان

**5** اكتب المقدار $\left(-\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ على أبسط صورة.

أ $\frac{1}{25}$ ب $-\frac{1}{25}$
ج $25$ د $-25$

**6** حدِّد إحداثيَّيْ منتصَف القطعة المستقيمة التي يحتلّ طرفاها النقطتَيْن $(-1,-4)$ وَ $(-7,2)$.

أ $(-1,-3)$ ب $(-3,3)$
ج $(-1,-4)$ د $(-3,-3)$

**7** اكتب على الصورة العامَّة

$(5x^3-2x^2+x-10)+(2x^3-3x-1)$

أ $3x^3-2x^2-4x-9$
ب $3x^3+2x^2+4x-9$
ج $7x^3-2x^2-2x-9$
د $7x^3-2x^2-2x-11$

**8** اكتب المقدار $\frac{x^2-2x}{2x+8} \times \frac{x^2+3x-4}{x^2}$ على الصورة الأبسط.

**9** اكتب معادلة على صورة المَيل–التقاطع للمستقيم المار بالنقطتَيْن $(3,-4)$ وَ $(2,7)$.

**10** ما أصفار الدالّة $f(x)=x^2-8x+12$؟

**11** حلِّل $5x^2+10x-40$، إن كان ذلك ممكنًا.

**12** حلِّل $8x^3+64$.

**13** اكتب معادلات جميع المحاذيات الأفقيَّة والعموديَّة للدالَّة النسبيَّة $f(x)=\frac{(x+2)^2}{3x}$.

**14** حلِّل $6x^2+8x-15x-20$، إذا كان ذلك ممكنًا.

**15** اكتب المقدار $\frac{\frac{x+4}{9x^2}}{\frac{x-6}{3x^4}}$ على أبسط صورة.

**16** حُلَّ المعادلة $\frac{6x+2}{3x}=6$.

**17** ما مَيل المستقيم $y=8$؟

**18** ماذا تضيف إلى $x^2+8x$ لإكمال المربَّع؟

**نشاطات لاصفيَّة يضمّ نادي الشطرنج في مدرسة الخيام 12 عضوًا، 5 كبارًا وَ7 صغارًا.**

**19** كم فريقًا من 6 لاعبين يمكنك أن تشكِّل، بحيث يضمّ الفريق 3 كبارًا على الأقلّ؟

**20** كم فريقًا من 6 لاعبين يمكنك أن تشكِّل، بحيث يضمّ الفريق 3 صغارًا على الأقلّ؟

**21** كم فريقًا من 6 لاعبين يمكنك أن تشكِّل، بحيث يضمّ الفريق 3 صغارًا على الأكثر؟

**عمل اجتماعي يبيِّن الجدول ما أنفقته جمعيَّة البرّ من مساعدات، بملايين الدنانير، خلال 12 شهرًا.**

| 14.8 | 2.5 | 2.9 | 3.0 | 3.7 | 4.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.7 | 4.8 | 4.2 | 5.6 | 6.1 | 10.6 |

**22** احسب متوسِّط الإنفاق الشهريّ.

**23** احسب المدى والتبايُن والانحراف الوسطي والانحراف المعياري لهذه المعطيات.

# الفصل السابع

# الهندسة




# الهندسة Geometry

الهندسة علم قديم وحديث في آن. ظلَّ هذا العلم يتطوَّر بلا انقطاع منذ ما يزيد على ألفي سنة. بدأت الهندسة منذ القدم، وتكرَّست دراسة منهجيَّة في أعمال إقليدس. وظلَّت تتطوَّر وصولاً إلى أعمال الفيلسوف والرياضي الفرنسي رينيه ديكارت، وإلى دراستها في العصر الحديث، باستعمال الحاسبات والحواسيب المتقدِّمة.

سوف تتعلَّم في هذا الفصل العلاقات الأساسية التي تربط بين مكوِّنات الهندسة في المستوي والفضاء. وتتعلَّم كيف ترسم الأجسام الهندسية الثلاثية الأبعاد في المستوي، كما يراها الناظر. وتتعلم أيضًا تحويلاً هندسيًّا جديدًا يختلف عن التحويلات التي عرفتها، من حيث أنه لا يحفظ المسافات. وثمَّة أشياء أخرى سوف تتعلَّمها.

## الدروس



## حول مشروع الفصل

سبق للرياضي جورج بيك أن وجد قانونًا لحساب مساحة مضلّع يختلف عن المضلّعات التي سبق أن تعلّمت حساب مساحاتها.

سوف تستعمل الورق المنقّط وتصل بين بعض النقاط لتحصل على مضلّع. وسوف تجد نمطًا يسمح لك بصياغة قانون حساب لمساحة تلك الأنواع من المضلّعات.

بعد الانتهاء من هذا المشروع يصبح بإمكانك:

- حساب مساحات بعض الأشكال المعقَّدة، دون استعمال قوانين المساحة التقليدية.




# بعض منطلقات الهندسة الإقليدية

## Building The Geometry



**لماذا** يُمكنك استعمال أشكال هندسية، من نقاط ومستقيمات ومستويات، كي تُنشئ نماذج رياضية لأشياء مادية. تُستعمل هذه النماذج لحل مسائل من الحياة.

المجرَّة اللولبية $M\,31$ في مجموعة أندروميد هي بمثابة رفيقة لمجرَّتنا. وكما تتكوَّن المجرّات من نجوم وكواكب، تتكوَّن الأشكال الهندسية من نقاط.

**الأهداف**

- يُميِّز النقطة والمستقيم والمستوي.
- يُعرِّف القطعة المستقيمة ونصف المستقيم والزاوية ونقاطًا على استقامة واحدة أو على استواء واحد.
- يتحقَّق من بعض المسلَّمات التي تتعلَّق بالنقاط والمستقيمات والمستويات.

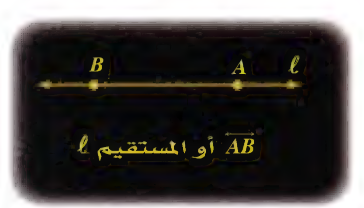
## العناصر الأساسيّة في الهندسة Basic elements in geometry

لعلَّ العناصر الأساسية للهندسة هي **النقطة Point والمستقيم Line والمستوي Plane**. منها تتكوَّن الأشكال والأجسام الهندسية كافَّة. وقد وصل علماء الرياضيات إلى طريق مسدود في تعريف هذه العناصر، ما استوجب اتِّفاقهم على قبولها كما هي دون تعريف. وبالرغم من عدم تعريف هذه العناصر، فإن من الممكن التحدّث عنها.

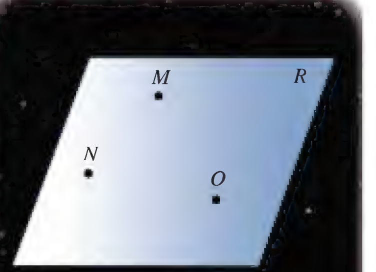
أوَّل ما ينبغي معرفته عن الأشكال والأجسام الهندسية أنها ليست أشياء موجودة في عالمنا المحسوس. فالنقطة لا قياس لها، والمستقيم لا عرض له. يتضمَّن هذا الكتاب تمثيلاً للأشكال والأجسام الهندسية. غير أن التمثيل شيء والشكل أو الجسم الهندسي شيء آخر. نظريًّا، لا توجد الأشكال والأجسام الهندسية إلا في الأذهان.




**النقطة** عندما تنظر إلى السماء في ليلة صافية، تشاهد نجومًا بعيدة مضيئة، تبدو وكأنَّها نقاط. تُمثَّل النقطة عادة بالأثر الذي يتركه رأس القلم على ورقة. لهذا التمثيل قياس يكبر أو يصغر، في حين أنَّ النقطة التي يمثِّلها هذا الأثر لا قياس لها. تُستعمل عادة الأحرف الكبيرة ... $A, B, C$ لتسمية النقاط.

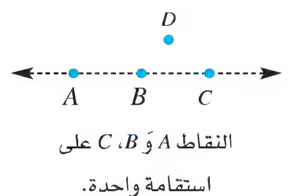



**المستقيم** لا عرض للمستقيم الهندسي. إنه خطٌ لا اعوجاج فيه، يمتدُّ إلى ما لا نهاية في الاتِّجاهين. لتسمية المستقيم، استعملِ اسمَي نقطتَين مختلفتَين يمرّ بهما، مع سهم مزدوج فوق الحرفين. فالكتابة $\overleftrightarrow{AB}$ هي اسم المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $A$ وَ $B$. ويمكنك أن تُسمّي مستقيمًا بحرف واحد.




**المستوي** حيِّز مسطَّح يمتدّ إلى ما لا نهاية في جميع الاتجاهات. يمكنك تمثيل جزء من المستوي بأي سطح لا التواء فيه، كوجه طاولة أو غلاف كتاب.

يُمثِّل الحيِّز المُسطَّح في الشكل المقابل جزءًا من مستوٍ. لتسمية مستوٍ استعملْ أسماء ثلاث نقاط يمر بها؛ فتقول المستوي $MNO$، شرط ألاّ تقع النقاط الثلاث على مستقيم واحد. ويمكنك أن تستعمل حرفًا واحدًا لتسمية المستوي، فتقول المستوي $R$.




النقاط $A$ وَ $B$، $C$ على استقامة واحدة.

النقاط $A$، $B$، $D$ ليست على استقامة واحدة.

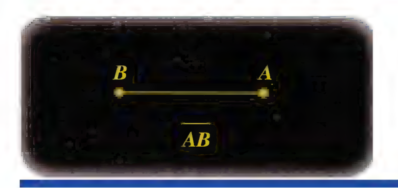
تقول عن عدد من النقاط المختلفة أنها على **استقامة واحدة Collinear**، إذا وقعت على مستقيم واحد. يُبيِّن الشكل المقابل أن النقاط $A$، $B$، $C$ على استقامة واحدة. تقول، أيضًا، إن عددًا من النقاط المختلفة على **استواء واحد Coplaner**، إذا وقعت في مستوٍ واحد. لاحظ أن أي نقطتين هما دائمًا على استقامة واحدة، وأن أي نقاط ثلاث هي دائمًا على استواء واحد.

## تعريف أشكال هندسيّة انطلاقًا من العناصر الأساسيَّة في الهندسة
## Defining Figures in Terms of the Basics Elements

يمكنك تعريف عدد من الأشكال الهندسية، انطلاقًا من العناصر الأساسيَّة في الهندسة. سوف تُعرِّف القطعة المستقيمة وشعاع والزاوية.

### تعريف القطعة المستقيمة Segment Definition

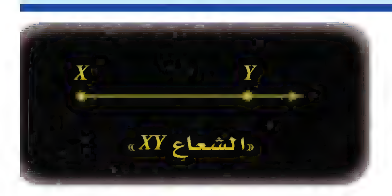
**القطعة المستقيمة Segment** جزء من مستقيم يبدأ عند نقطة منه، وينتهي في نقطة أخرى.
**طرفا القطعة المستقيمة Endpoints** هما النقطتان اللتان تحدّانها.




لتسمية قطعة مستقيمة استعمل اسمَي طرفَيها، واضعًا خطًّا فوق الاسمين. فالكتابة $\overline{AB}$ تدلّ على القطعة المستقيمة التي يتمثَّل طرفاها بالنقطتَين $A$ وَ $B$.

### تعريف الشعاع (نصف المستقيم) Ray Definition

**الشعاع Ray** هو جزء من مستقيم يبدأ عند نقطة منه، ويمتد إلى ما لا نهاية في اتّجاه واحد.
**طرف الشعاع Endpoints** هو النقطة التي تحدُّه.




لتسمية الشعاع استعمل اسم النقطة التي تشكِّل طرفه، واسم نقطة أخرى. فالكتابة «الشعاع $\overrightarrow{XY}$» تدلّ على الشعاع طرفه النقطة $X$، ويمرّ بالنقطة $Y$.

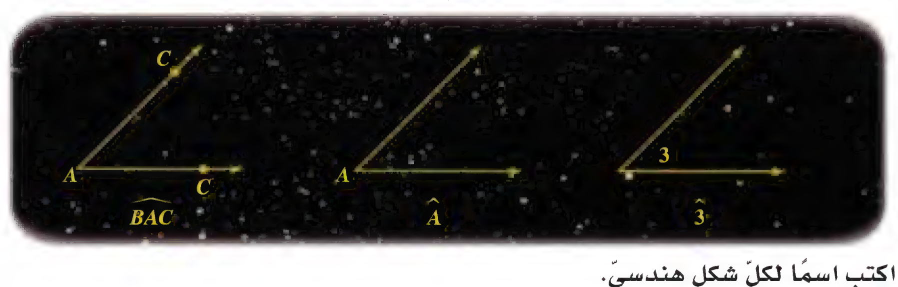
## تعريف الزاوية Angle Definition

**الزاوية Angle** هي الشكل الهندسي المكوَّن من شعاعين لهما طرف مشترك . نقطة الطرف المشترَكة هي رأس الزاوية **Vertex**. الشعاعان هما **ضلعا الزاوية Sides**.

تقسم الزاوية المستوي الذي يحتويها إلى قسمَين يفصل بينهما ضلعا الزاوية. هذانِ القسمانِ هما: **داخل الزاوية Interior وخارجها Exterior**. إذا وصلْتَ نقطة على أحد ضلعي الزاوية بنقطة على الضلع الآخر، فإن القطعة المستقيمة التي ترسمها تقع داخل الزاوية.

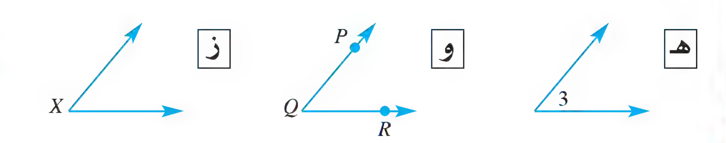



لتسمية زاوية، استعمل اسم رأسها وارسم فوقه ما يشبه القبَّعة. فالكتابة $\widehat{D}$ تدلّ على زاوية رأسها النقطة $D$. لمزيد من الدقّة، يمكنك أن تستعمل، بالإضافة إلى اسم رأس الزاوية، اسمَي نقطتَين تقع كل منهما على ضلع من ضلعَي الزاوية، فتكتب الأسماء الثلاثة تحت القبَّعة على أن يكون اسم الرأس في الوسط. فالكتابة $\widehat{BAC}$ تدل على زاوية رأسها النقطة $A$، يحمل أحد ضلعيها النقطة $B$، ويحمل الضلع الآخر النقطة $C$. يمكنك أيضًا أن تكتب رقمًا داخل الزاوية، وتستعمله للدلالة عليها. فالكتابة $\widehat{3}$ تدلّ على الزاوية التي في داخلها الرقم 3.




### مثـــــال 1

اكتب اسمًا لكلّ شكل هندسي.




هـ   و   ز   ح

### الحـــل

أ $\overleftrightarrow{XY}$ أو $\overleftrightarrow{YX}$ أو المستقيم $YX$ أو المستقيم $\ell$ .

ب $\overrightarrow{PQ}$ أو $\overleftrightarrow{QP}$ أو القطعة المستقيمة $PQ$.

ج الشعاع $\overrightarrow{MN}$.   د النقطة $Y$.   هـ $\widehat{3}$ أو الزاوية 3.

و $\widehat{PQR}$ أو $\widehat{RQP}$ أو الزاوية $RQP$.   ز $\widehat{X}$ أو الزاوية $X$.

ح المستوي $TSR$ أو المستوي $RTS$ أو المستوي $STR$ أو المستوي $SRT$ أو المستوي $RST$ أو المستوي $TSR$ أو المستوي $L$.

## تقاطع المستقيمات والمستويات Intersection of Lines and Planes

**يتقاطع Intersect** شكلان هندسيّان، أو جسمان هندسيّان، أو شكل هندسي وجسم هندسي، عندما يتشاركان في نقطة أو أكثر. وفي هذه الحالة، تُدعى مجموعة النقاط المشتركة **تقاطع Intersection** الشكلَين، أو الجسمَين، أو الشكل والجسم.

سوف تكتشف، خلال النشاط الذي يتضمَّنه الدرس، عددًا من المبادئ الأساسية أو المسلَّمات، في الهندسة. تتناول هذه المبادئ تقاطع الأشكال الهندسية والأجسام الهندسية. هذه المُسلَّمات مقولات تؤكِّد صحَّة أمور تقبلها دون برهان.

## النشاط

### استكشاف بعض المسلَّمات عبر دراسة نموذج
### Disconering Geometry Ideas in Model

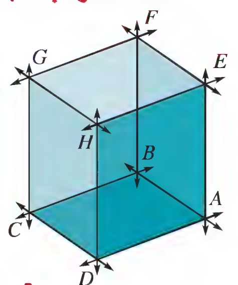
يمكنك النظر إلى الرسم المقابل على أنه نموذج لأشياء من الواقع، مثل صندوق أو غرفة.
أكمل كل جملة من الجمل الناقصة لتحصل على مُسلَّمة.

**1.** تفحَّص النموذج. ميِّز كيف تتقاطع المستقيمات. مِمَّ يتكون تقاطع مستقيمَين؟

**مُسلَّمة**

يتكوَّن تقاطع مستقيمَين من ___؟___ واحدة.




ما عدد المستقيمات التي تتقاطع عند كل رأس من رؤوس النموذج؟ هل تعتقد أن هناك حدًّا أعلى لعدد المستقيمات التي تتقاطع في نقطة واحدة؟ أوضح رأيك مستعينًا برسم.

**2.** تفحَّص النموذج. ميِّز كيف تتقاطع المستويات. مِمَّ يتكوَّن تقاطع مستويَين؟

**مسلَّمة**

يتكون تقاطع مستويَين من ___؟___ واحد.

نقطة مراقبة

ما عدد المستويات التي تتقاطع عند كل مستقيم في النموذج؟ هل تعتقد أن هناك حدًّا أعلى لعدد المستويات التي تتقاطع عند مستقيم واحد؟

**3.** انظر إلى النقطتَين $A$ وَ $B$. كم مستقيمًا يمر بالنقطتَين معًا؟ هل يمكنك أن تتخيَّل مستقيمًا آخر يمر بهاتَين النقطتَين معًا؟

**مُسلَّمة**

يمر ___؟___ واحد فقط بنقطتَين مختلفتَين.
يُشار إلى المستقيم المار بالنقطتَين $A$ وَ $B$ بالرمز $\overleftrightarrow{AB}$ .




**4.** انظر إلى النقاط $A$ وَ $B$ وَ $C$. هل تقع على استقامة واحدة؟ كم مستويًا يمرّ بهذه النقاط معًا؟ هل يمكنك أن تتخيَّل مستويًا آخر يمر بهذه النقاط الثلاث معًا؟

**مُسلَّمة**

يمر ___؟___ واحد فقط بثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.
يُشار إلى المستوي المار بالنقاط $A$ وَ $B$ وَ $C$ بأنه المستوى $ABC$.



5. اختر أيّ مستوٍ من مستويات النموذج واختر نقطتَين من نقاطه. سَمِّ المستقيم الذي يمرّ بهاتَين النقطتَين. هل يقع هذا المستقيم بكامله ضمن المستوى؟

**مُسلَّمة**



نقطة مراقبة

إذا انتمت نقطتان مختلفتان إلى مستوٍ، فإن المستقيم المار بهاتين النقطتَين يقع ___؟___ .

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

1 ما الفرق بين الأشكال الهندسية والأشياء في الواقع؟

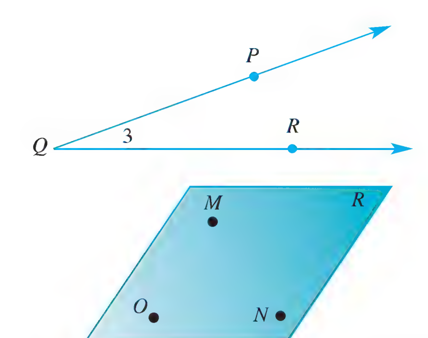
2 أمعن النظر في القاعة التي أنت فيها. اذكر بعض الأشياء التي تمثِّل نقطة أو مستقيمًا أو مستويًا.

3 لِمَ لا تكفي نقطة واحدة لتحديد مستقيم وتسميته؟

4 لِمَ لا تكفي نقطتان لتحديد مستوٍ وتسميته؟

5 ما أهمية ترتيب النقاط عند تسمية نصف مستقيم. أوضح ذلك بالرسم.

## تمارين موجَّهة



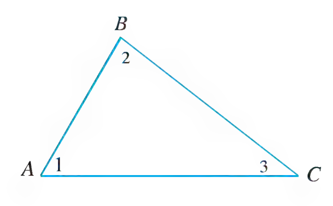

6 استعمل الشكل المقابل لتسمية نقطة ومستقيم وقطعة مستقيمة وشعاع.

7 اكتب 4 أسماء للزاوية في الشكل المقابل.

8 اكتب 3 أسماء للمستوي في الشكل المقابل.

## تمارين وتطبيقات

**استعمل المثلَّث لحل التمارين من 9 إلى 12.**




9 اذكرْ جميع القطع المستقيمة في المثلَّث.

10 اذكرْ كل زاوية من زوايا المثلَّث بثلاث طرق.

11 اذكرْ الشعاعين اللذَيْن يشكِّلان كل زاوية من زوايا المثلَّث.

12 اذكرِ المستوي الذي يحتوي على المثلَّث.

**تطبيقات**

**هوايات استعمل صورة حوض الأسماك أدناه لحل التمارين من 13 إلى 17. هل تمثِّلُ كلَّ مكوِّن من مكوِّنات الحوض التالية نقطةً أم مستقيم أم مستوٍ؟**

13 ضلع من أضلاع الحوض

14 حبّة رمل

15 وجه من وجوه الحوض

16 سطح الماء

17 رأس من رؤوس الحوض



**هل المقولة الواردة في كلّ تمرين من التمارين 18-25، صواب أم خطأ؟ علّل ذلك.**

18 للمستقيم نقطة طرف.

19 للمستوي حدّ.

20 إذا تقاطعت ثلاثة مستقيمات في نقطة واحدة، فإنها تقع في المستوي نفسه.

21 يمكن لمستويين أن يتقاطعا مع مستوٍ ثالث دون أن يتقاطعا فيما بينهما.

22 يمكن لثلاثة مستويات أن تتقاطع في نقطة واحدة.

23 أي نقطتَين تنتميان إلى مستوٍ واحد فقط.

24 أي ثلاث نقاط تنتمي إلى مستوٍ واحد فقط.

25 أي أربع نقاط تنتمي إلى مستوٍ واحد فقط.

**استعمل الشكل المقابل، لحل التمارين من 26 إلى 30.**

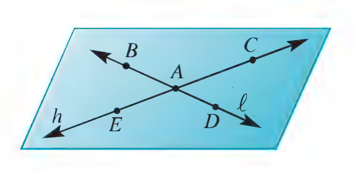
26 سَمِّ مستقيمًا في الشكل. اكتب 3 أسماء أُخرى لهذا المستقيم.

27 سَمِّ نقطة على المستقيم $\ell$.

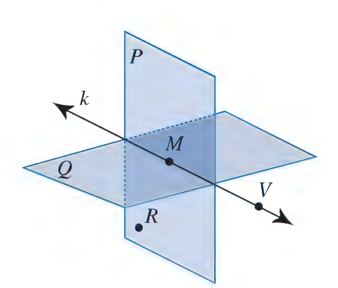
28 سَمِّ تقاطع المستقيمَين $\ell$ و $h$.

29 سَمِّ زاوية في الشكل. سَمِّ رأس هذه الزاوية والشعاعين اللذَين يكوِّنانها.

30 هل يُمكن لإحدى زوايا الشكل أن تُسمَّى $\hat{A}$؟ علِّل جوابك.



**انظر إلى الشكل التالي، لحلّ التمارين من 31 إلى 33.**

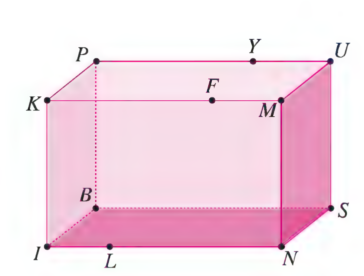



31 سَمِّ تقاطع المستويَين $P$ وَ $Q$.

32 سَمِّ مستقيمًا يقع في المستوي $Q$.

33 سَمِّ نقطة تقع في المستوي $P$.

**استعمل الشكل التالي، لحل التمارين من 34 إلى 37.**



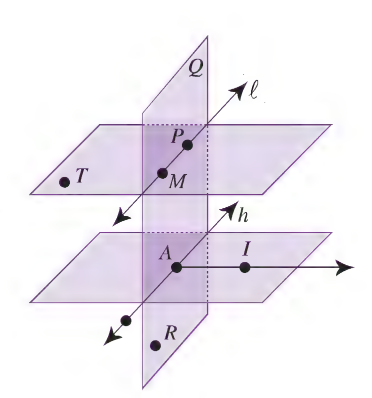

34 سَمِّ نقطة على $\overline{KM}$ .

35 سَمِّ تقاطع $\overline{MU}$ وَ $\overline{MN}$ .

36 سَمِّ ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

37 سَمِّ قطعتَين مستقيمتَين على استواء واحد.

**انظر إلى الشكل التالي لحل التمارين من 38 إلى 40.**

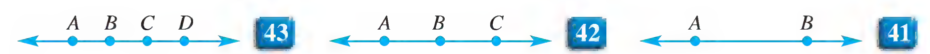



38 سَمِّ تقاطع المستقيمَين $h$ وَ $AI$ .

39 سَمِّ تقاطع المستوي $Q$ والمستوي $MPT$ .

40 سَمِّ ثلاث نقاط على استواء واحد.

**ما عدد القطع المستقيمة المختلفة التي يمكن تسميتها في كل من الأشكال التالية؟ سَمِّ كلاً منها.**

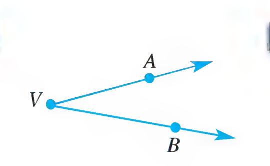



الجبر

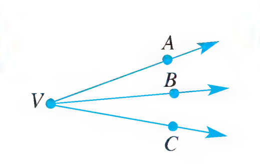
44 اكتب قاعدة عامّة تعطي عدد القطع المستقيمة التي يُمكن تسميتها بمعرفة عدد معيَّن، $n$، من النقاط الواقعة على مستقيم واحد. أوضح كيف وجدتها.

**ما عدد الزوايا الحادّة التي يمكن تسميتها في كل من الأشكال التالية؟ سَمِّها.**

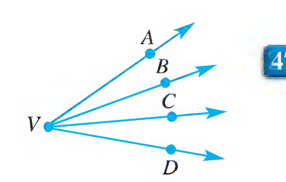
**45**




**46**

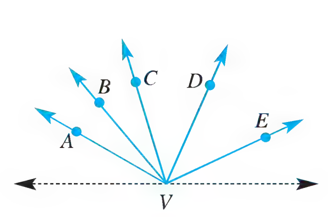



**47**




الجبر

**48** أنظر إلى الشكل المقابل. سمّ الزوايا التي تراها. ما عددها؟اكتب قاعدة عامّة لإيجاد عدد الزوايا التي قياسها أصغر من $180^\circ$، والتي يُمكن تسميتها بمعرفة عدد معيّن، $n$، من أنصاف المستقيم التي لها نقطة الطرف نفسها. أوضح كيف وجدتها. (افترض أن جميع الشعاعات تقع على جهة واحدة من مستقيم، كما يبيِّن ذلك الشكل المقابل).




## نظرة إلى الوراء

**اكتب معادلة على صورة المَيل-التقاطع للمستقيم:**

**49** الموازي للمستقيم $y=\frac{3}{4}x-1$ والمارّ بالنقطة $(-2, 5)$ .

**50** المتعامد مع المستقيم $2x-3y=1$ والمارّ بالنقطة $(-4, 2)$ .

**احسب مميِّز المعادلة التربيعيَّة، وحدِّد عدد جذورها، ثم احسب هذه الجذور.**

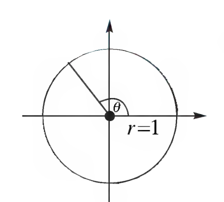
**51** $x^2-6x+12=0$ **52** $4x^2-4x+1=0$ **53** $x^2-6x+8=0$

**احسب عدد التراتيب، أو عدد التوافيق.**

**54** ${}_8P_3$ **55** ${}_9P_7$ **56** $\binom{10}{3}$ **57** $\binom{8}{4}$

## نظرة إلى الأمام

$2\pi$ هو محيط الدائرة التي يحتلّ مركزها نقطة الأصل في المستوي الإحداثيّ وشعاعها 1. يمكنك حساب طول القوس الذي تحدِّده الزاوية المركزية، $\theta$ عندما يكون قياسها بالدرجات،بالقانون: $\ell=\frac{\theta}{360}\times 2\pi$ ، حيث يرمز $\ell$ إلى طول القوس. احسب طول القوس الذي تحدِّده كل زاوية.




**58** $\theta=180$ **59** $\theta=90$

**60** $\theta=360$ **61** $\theta=45$




# المستويات والمستقيمات في الفضاء

# Lines and Planes in Space



**الأهداف**

- يُميِّز العلاقات بين النقاط والمستقيمات والمستويات في الفضاء.
- يُميِّز زاوية مستويَين.

**لماذا**

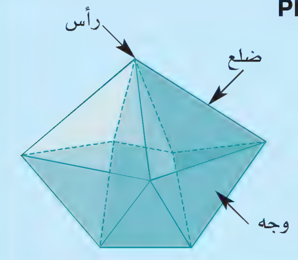
تلاحظ تداخل المستقيمات والمستويات في الكثير من الأشياء، كما هو ظاهر في قطع البلور. يُعتبر إدراك العلاقات بين المستويات والمستقيمات في الفضاء أمرا ضروريًا لفهم العديد من البنى في الطبيعة.

## الأجسام الهندسية Solides in Space

**متعدِّد الوجوه Polyhedron** جسم فضائيّ مغلق مؤلَّف من عدَّة وجوه مستوية، يتَّخذ كلّ منها شكل مضلَّع.

### متعدِّد الوجوه Plolyhedron

**متعدِّد الوجوه** جسم فضائيّ مُغلق مكوَّن من عدَّة وجوه مستوية يتَّخذ كل منها شكل مضلَّع. هذه المضلَّعات تُسمّى **وجوه الجسم Faces**، وهي تتقاطع وفق قطع مستقيمة تُسمّى **أضلاع متعدِّد الوجوه Edges**. **رؤوس متعدِّد الوجوه Vertices** هي رؤوس المضلَّعات التي تشكِّل وجوهه.




هناك متعدِّد وجوه تعرفه أكثر من غيره هو المكعَّب. فالمكعَّب جسم فضائي ذو ستَّة وجوه وَ 12 ضلعًا وَ 8 رؤوس. وهو يتمتَّع بخاصّيَّة مهمَّة، هي أن جميع وجوهه مربَّعات مُتطابقة، وأن كل رأس من رؤوسه نقطة التقاء 3 وجوه. نقول عنه إنه **متعدِّد وجوه مُنتظم Regular Polyedron**. بصورة عامة، نقول عن متعدِّد وجوه إنه **مُنتظم Regular**، إذا كانت جميع وجوهه مضلَّعات متطابِقة، وكان كل رأس من رؤوسه نقطة التقاء العدد نفسه من الوجوه.

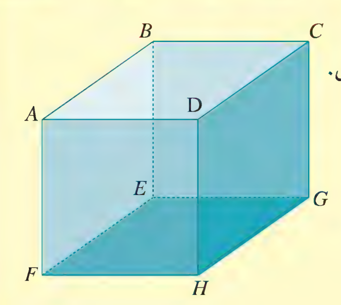
# المستقيمات والمستويات في الفضاء: الطريق خطوة خطوة
# Lines and Planes in Space: A Step-by-Step Procedure

سوف تستكشف في النشاطات التالية أفكارًا حول العلاقات بين المستويات والمستقيمات في الفضاء، وتقوم بتطويرها.

## النشاط 1

### المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء
### Parallel Lines and Planes in Space

**القسم الأوَّل**




1. ارسم المكعَّب وسمِّ رؤوسه، كما هو مبيَّن في الشكل المقابل. اذكر المستقيمات التي تحمل الأضلاع العمودية للمكعّب بأسمائها. هل يبدو المستقيمان $AE$ وَ $CG$ في المستوى نفسه؟ هل يبدوان متوازيَيْن؟ هل تعتقد أنهما سيلتقيان إذا ما تم تمديدهما إلى ما لا نهاية؟
2. أيٌّ من أضلاع المكعَّب تبدو متوازية؟
3. هل هناك أضلاع غير متوازية، ولا تلتقي بالرغم من تمديدها إلى ما لا نهاية؟ علِّل ذلك. يُقال عن المستقيمات التي تحمل مثل هذه الأضلاع أنها **متخالفة Skew**. اذكُر أربعة أزواج من المستقيمات المتخالفة في الصورة.

نقطة مراقبة √

**القسم الثاني**

1. ما عدد وجوه المكعَّب؟ أيُّ الوجوه تبدو متوازية؟
2. اكتب تعريفك الخاص للمستويات المتوازية، بإكمال الجملة التالية:

نقطة مراقبة √

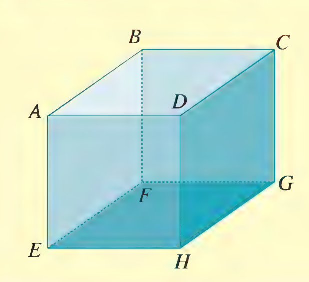
**تعريف: المستويات المتوازية Parallel Planes**

يتوازى مستويان، إذا، وفقط إذا، ؟ .

## النشاط 2

### القطع المستقيمة والمستويات
### Segments and Planes

**القسم الأوّل**




1. كل مستقيم يحمل ضلعًا من أضلاع المكعَّب. يتعامد مع وجهَين مختلفَين. أنشئ لائحة بالمستقيمات التي تحمل أضلاع المكعَّب، مع ذكر الوجهَيْن المتعامدَين معها.




2. ماذا يعني لك أن يكون المستقيم متعامدًا مع مستوٍ؟ ارسم مستقيمًا $\ell$ على ورقة، وارسم عليه نقطة $P$. أمسك بالقلم عموديًا على مستوي الورقة ورأسه عند النقطة $P$. هل يتعامد القلم مع المستقيم $\ell$ ؟

3. هل يمكنك إمالة القلم بحيث يبقى متعامدًا مع المستقيم $\ell$ ، دون أن يكون متعامدًا مع مستوي الورقة؟ أنشئ رسمًا يوضح إجابتك.

4. ارسم، في مستوى الورقة، مستقيمًا جديدًا $m$ يمر بالنقطة $P$. ضع رأس القلم على النقطة $P$، بحيث يكون القلم متعامدًا مع كلٍّ من المستقيمَين $\ell$ وَ $m$. ماذا تقول عن القلم بالنسبة إلى مستوي الورقة؟

5. ارسم عددًا آخر من المستقيمات المارة بالنقطة $P$. إذا كان القلم متعامدًا مع مستوي الورقة، فهل يكون متعامدًا مع المستقيمات المرسومة؟

6. اكتب تعريفك الخاص للمستقيم المتعامد مع مستوٍ بإكمال الجملة التالية: **نقطة مراقبة √**

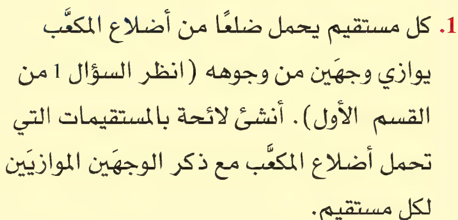
### تعريف

يكون المستقيم متعامدًا مع مستوٍ في نقطة معيَّنة منه، إذا، وفقط إذا، كان متعامدًا مع كل مستقيم يقع في المستوي ويمرّ بـ ___؟___ .

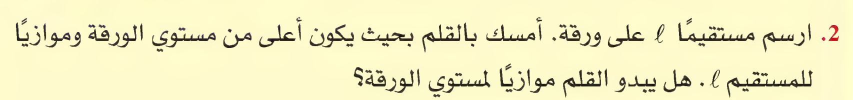


### القسم الثاني

يوازي المستقيم مستويًا إذا لم يقطعه.



1. كل مستقيم يحمل ضلعًا من أضلاع المكعَّب يوازي وجهَين من وجوهه (انظر السؤال 1 من القسم الأول). أنشئ لائحة بالمستقيمات التي تحمل أضلاع المكعَّب مع ذكر الوجهَين الموازيَين لكل مستقيم.



2. ارسم مستقيمًا $\ell$ على ورقة. أمسك بالقلم بحيث يكون أعلى من مستوي الورقة وموازيًا للمستقيم $\ell$ . هل يبدو القلم موازيًا لمستوي الورقة؟

3. أدر القلم بحيث يبقى موازيًا لمستوي الورقة دون أن يكون موازيًا للمستقيم $\ell$ . هل تعتقد أن بإمكانك أن ترسم على الورقة مستقيمًا يكون موازيًا للقلم بوضعه الجديد؟

4. اكتب خاصيَّة من خصائص المستقيم الموازي لمستوٍ، بإكمال الجملة التالية: **نقطة مراقبة √**

### تعريف

يوازي المستقيم مستويًا لا يقع فيه إذا، وفقط إذا، وازى ___؟___ يقع في ذلك المستوي.

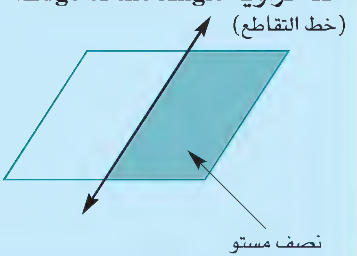
## زاوية مستويَين Angles Formed by Two Planes

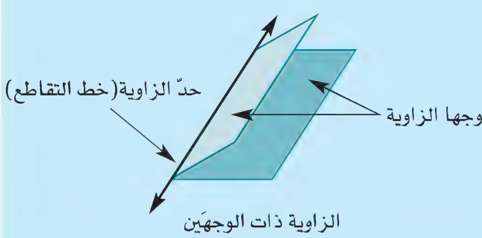
كل مستقيم، يقع في مستوٍ، يقسمه إلى قسمَين يُسمّى كل منهما **نصف مستوٍ Half-Plane**، ويُسمّى المستقيم **حد نصف المستوى Edge of the Half-Line**.

### الزاوية ذات الوجهَين (الزاوية الزوجية) Dihedral Angle

**الزاوية ذات الوجهَين Dihedral Angle** هي الشكل الفضائيّ المكوَّن من نصفَي مستوٍ لهما الحدّ نفسه.

كل واحد من نصفَي المستوي يُسمّى **وجهًا للزاوية Face**. ويُسمّى الحد المُشترك لنصفَي المستوي **حدَّ الزاوية Edge of the Angle** (خط التقاطع).



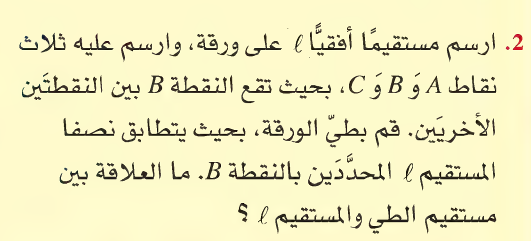




## النشاط 3

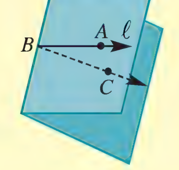
### قياس الزاوية ذات الوجهَين (الزوجية) Measure of a Dihedral Angle

1. تؤلِّف بعض وجوه المكعَّب زاوية قائمة ذات وجهَين (أي إن الوجهَين متعامدان). يتعامد كل وجه من وجوه المكعَّب مع عدد من الوجوه الأخرى. كم يبلغ هذا العدد؟

2. ارسم مستقيمًا أفقيًّا $\ell$ على ورقة، وارسم عليه ثلاث نقاط $A$ و $B$ و $C$، بحيث تقع النقطة $B$ بين النقطتَين الأخريَين. قم بطيّ الورقة، بحيث يتطابق نصفا المستقيم $\ell$ المحدَّدَين بالنقطة $B$. ما العلاقة بين مستقيم الطي والمستقيم $\ell$ ؟




3. افتح الورقة بتأنٍّ، لكي تحصل على زاوية ذات وجهَين. قياس الزاوية $\widehat{ABC}$ هو قياس الزاوية ذات الوجهين.



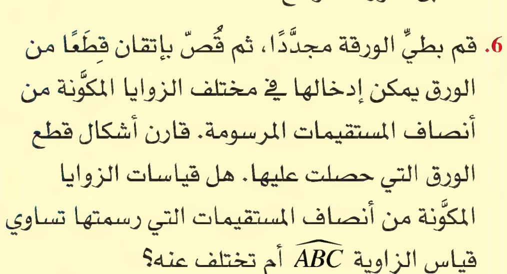

4. اكتب تعريفك الخاص لقياس الزاوية ذات الوجهين بإكمال الجملة التالية:




### قياس الزاوية ذات الوجهَين الزوجية Measure of a Dihedral Angle

هو قياس زاوية رأسها على حدّ الزاوية ذات الوجهين، وضلعاها ____؟____ مع هذا الحد، ويقع كلّ منهما في وجه من وجهَي الزاوية ذات الوجهَين (الزوجية).

**5.** افتح الورقة وابسطها. ارسم مستقيم الطيّ، وارسم عليه نقطتَين $X$ وَ $Y$. ارسم نصفَي مستقيم ينطلقان من $X$، ويكون كل منهما في جهة من مستقيم الطيّ، كما هو مبيَّن في الرسم المقابل. كرِّر الأمر مع $Y$.



**6.** قم بطيِّ الورقة مجدَّدًا، ثم قُصّ بإتقان قِطَعًا من الورق يمكن إدخالها في مختلف الزوايا المكَوَّنة من أنصاف المستقيمات المرسومة. قارن أشكال قطع الورق التي حصلت عليها. هل قياسات الزوايا المكوَّنة من أنصاف المستقيمات التي رسمتها تساوي قياس الزاوية $\widehat{ABC}$ أم تختلف عنه؟



**نقطة مراقبة √**

**7.** قس الزوايا الثلاث التي حصلت عليها في السؤال 6، وقارن قياساتها. أيٌّ هي الزاوية الصغرى؟ وأيٌّ هي الزاوية الكبرى؟ استعمل هذه النتائج كي توضح لماذا تُقاس الزاوية ذات الوجهين بقياس زاوية ضلعاها متعامدان مع حد الزاوية ذات الوجهين.

**ملاحظة** قياس الزاوية الزوجية هو قياس زاوية رأسها على حد الزاوية الزوجية ويقع كل من ضلعيها في نصف مستوٍ ويتعامد مع حد الزاوية الزوجية. تُسمّى هذه **الزاوية المُستوية العائدة للزاوية ذات الوجهين.**

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

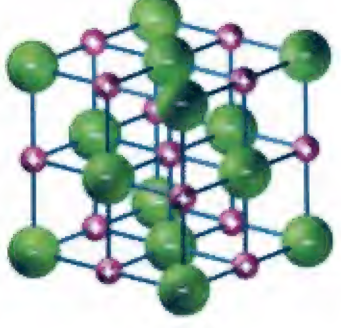
**1** إذا تعامد مستقيمان في الفضاء مع مستقيم ثالث، فهل يكونان متوازيَين؟ علِّل إجابتك.

**2** إذا تعامد مستقيم يقع في مستوٍ مع مستقيم لا يقع فيه، فهل يكون المستقيم الثاني متعامدًا مع المستوي؟ علِّل إجابتك.

**3** إذا تعامد مستقيم مع مستقيمَين متقاطعَين يقعان في مستوٍ، فهل يكون متعامدًا مع المستوي؟ علِّل إجابتك.

**تطبيقات**
**كيمياء**

**يُبيّن الشكل المقابل البنية التكعيبيّة لنموذج كريستال كلوريد الصوديوم. سَمِّ نقاط تقاطع القطع المستقيمة التي تراها، واستعملها في حل التمارين من 4 إلى 6.**



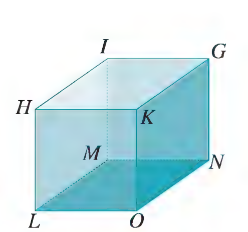
**4** اذكر قطعتَين مستقيمتَين متوازيتَين، وعلِّلْ سبب توازيهما.

**5** اذكر مستويَين متوازيَين، وعلِّلْ سبب توازيهما.

**6** اذكر مستويَين متعامدَين، وعلِّلْ سبب تعامدهما.

## تمارين موجَّهة

**استعمل رسم المكعَّب المقابل في حل التمارين من 7 إلى 11.**



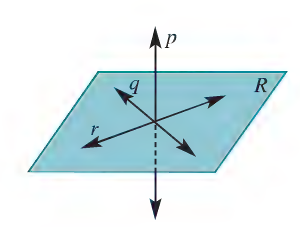

**7** اذكر زوجَين من الأضلاع المتوازية.

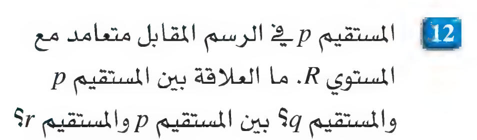
**8** اذكر زوجَين من الأضلاع المتخالفة.

**9** اذكر زوجَين من الوجوه المتوازية.

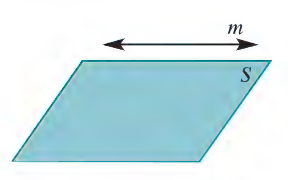
**10** اختر ضلعَين واذكر المستويات المتعامدة مع كل منهما.

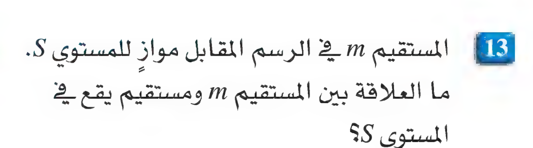
**11** اذكر زوجَين من الأضلاع المتوازية لا يقعان في وجه واحد.



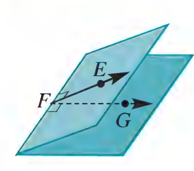



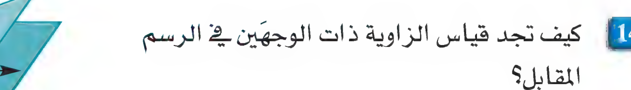
**12** المستقيم $p$ في الرسم المقابل متعامد مع المستوى $R$. ما العلاقة بين المستقيم $p$ والمستقيم $q$؟ بين المستقيم $p$ والمستقيم $r$؟



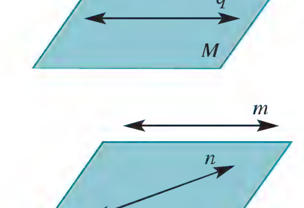
**13** المستقيم $m$ في الرسم المقابل موازٍ للمستوى $S$. ما العلاقة بين المستقيم $m$ ومستقيم يقع في المستوى $S$؟



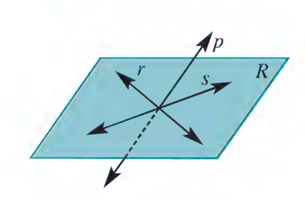
**14** كيف تجد قياس الزاوية ذات الوجهَين في الرسم المقابل؟

## تمارين وتطبيقات




**15** المستقيم $p$ في الرسم المقابل مواز للمستقيم $q$. ما العلاقة بين المستقيم $p$ والمستوي $M$؟

**16** المستقيم $m$ في الرسم المقابل لا يوازي المستقيم $n$. ماذا تقول عن العلاقة بين المستقيم $m$ والمستوى $Q$؟ أوضح ذلك.




**17** المستقيم $p$ في الرسم المقابل متعامد مع المستقيم $r$ وغير متعامد مع المستقيم $s$. ماذا تقول عن العلاقة بين المستقيم $p$ والمستوي $R$؟

**هل المقولة في كل تمرين من التمارين 18-22 صواب أم خطأ؟ ادعم وجهة نظرك بالرسوم.**

**18** إذا توازى مستقيمان مع مستقيم ثالث فإنهما يتوازيان.

**19** إذا توازى مستويان مع مستوٍ ثالث فإنهما يتوازيان.

**20** إذا تعامد مستويان مع مستوٍ ثالث فإنهما يتوازيان.

**21** إذا تعامد مستويان مع المستقيم نفسه فإنهما يتوازيان.

**22** إذا تعامد مستقيمان مع المستوي نفسه فإنهما يتوازيان.

**استعمل نموذجك الذي ستصنعه بحسب التعليمات في التمرين 23 لحل التمارين من 24 إلى 26.**




**23** قم بطيّ قطعة مستطيلة من الكرتون، وارسم على أحد جزءَيها مستقيمَين $AB$ وَ $CD$ ، بحيث يكون $AB$ متعامدًا مع خط الطيّ، ولا يكون $CD$ كذلك. قُصَّ القطعة وفق كلّ من المستقيمَين، انطلاقًا من خطّ الطيّ. أدخل بطاقتَين من الكرتون حيث تم قصّ القطعة لصنع نموذج .

**24** أيٌّ من البطاقتَين اللتَين تم إدخالهما، تمثّل مستويًا غير متعامد مع خطّ الطي؟

**25** أيٌّ من البطاقتَين اللتَين تم إدخالهما يمكن أن تستعمل لقياس الزاوية ذات الوجهَين؟

**26** أيٌّ من الزاويتَين المحدَّدتين بالبطاقتَين اللتَين تم إدخالهما، هي الأكبر قياسًا؟



## نظرة إلى الوراء

**استعمل الفرجار والمسطرة لرسم الصور في التمارين من 27 إلى 30.**

27 ارسم زاوية $ABC$، ثم أنشئَ نسخة طبق الأصل عنها.

28 ارسم قطعة مستقيمة، ثم أنشئَ محوَرها.

29 ارسم مستقيمًا $FG$ ونقطة $H$ خارجه. أنشئَ المستقيم المار بالنقطة $H$ والموازي للمستقيم $FG$.

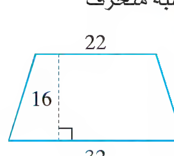
30 ارسم مثلّثًا، ثم أنشئَ نسخة طبق الأصل عنه.

**احسب مساحة المضلَّع.**

31 مربّع

14

32 شبه منحرف




33 متوازي أضلاع

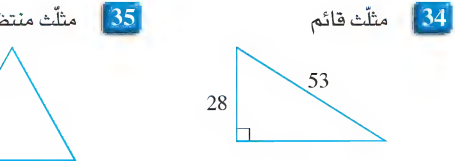
18
21
28

34 مثلّث قائم

53
28

35 مثلّث منتظم (متساوي الأضلاع)




36 مثلّث

6
9

## نظرة إلى الأمام

**تحـــدٍّ**

37 غيّر موقع عودَين فقط في الشكل أدناه، لكي تحصل على شكل يحتوي على ثلاثة مثلّثات فحسب.

38 غيّر موقع ثلاثة عيدان فقط في الشكل أدناه لكي تحصل على شكل يحتوي على ثلاثة مربّعات فحسب.








# الرسم المنظوري Perspective Drawing

**الأهداف**

- يتعرف المفاهيم الأساسية للرسم المنظوري.
- يستعمل هذه المفاهيم لإنشاء الرسوم المنظوريّة.



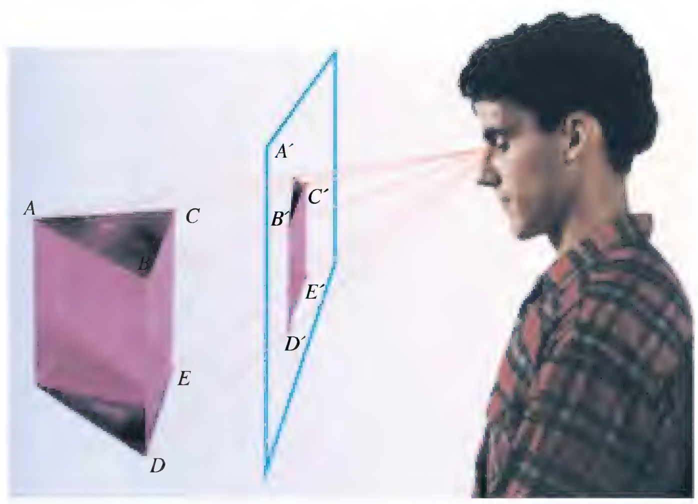

في عصر النهضة، الممتدّ بين القرنَين الرابع عشر والسادس عشر للميلاد، طور الفنّانون الأوروبيّون رسوماتهم، واكتشفوا، انطلاقًا من الأعمال الفنيَّة الكلاسيكيّة لليونان والرومان، كيف يولّدون الإحساس بالعمق في الرسوم واللوحات الفنيَّة. تستطيع أن تلاحظ كيف تبدو الأعمال السابقة لعصر النهضة مسطَّحة (في الصورة اليمنى) مقارنة مع لوحات هذا العصر (في الصورة اليسرى).

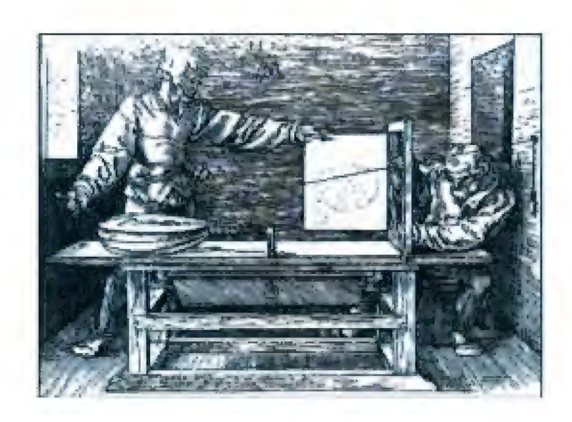
## الرسم المنظوري: نافذة على الواقع Windows to Reality

تم اكتشاف طُرق الرسم المنظوري الحديث على يد المعمار الإيطالي فيليب برنوليتشي (1377–1466م). تعتمد هذه الطرق على فكرة أساسيّة مفادها أن الصورة كالنافذة. يحاول الفنان الذي يرسم لوحة، أو الشخص الذي ينظر إلى لوحة فنية مُنجزة، أن يرى من خلال الرسم الشيء الحقيقيّ الذي تمثّله اللوحة.

عندما ينظر شخص إلى جسم فإنه يقيم خطوط نظر وهمية، تربط بين العين ومختلف النقاط التي تكوّن الجسم. تخيَّل أن هناك مستويًا (لوحًا من الزجاج مثلاً) يقع بين عين الناظر والجسم الذي ينظر إليه. تقطع جميع خطوط النظر هذا المستوي في نقاط تشكّل صورة الجسم، التي تبدو وكأنها أُسقطت على المستوي. بناء على ذلك، تقول عن صورة الجسم إنها أُسقطت على **مستوى الصورة Picture Plane**.

تتضمَّن «نافذةُ» مستوى الصورة إسقاطًا لما تراه.





زار الفنان الألماني ألبرت دورر (1471–1528م) إيطاليا لكي يتعلَّم تقنيات الرسم المنظوري. بعد ذلك، رسم مجموعة من الأعمال الفنية التي تظهر فنّانين يستعملون هذه التقنيات، كما يبدو في اللوحة المقابلة.

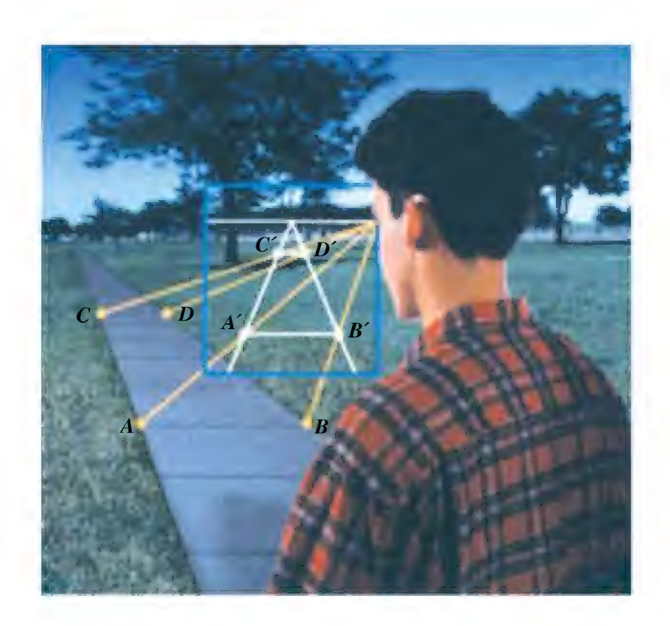
**نقطة مراقبة** √ انظر إلى لوحة دورر أعلاه، واشرح كيف تُبيِّن التقنية التي استعملها الفنان، إسقاط الشيء على مستوي الصورة.

## الخطوط المتوازية ونقطة التلاشي Parallel Lines and Vanishing Point



هل لاحظت أن طرفَي سكّة الحديد أو طرفَي طريق طويلة مستقيمة يبدوان وكأنهما يلتقيان في البعيد؟ إن النقطة التي يبدو أن هذه الخطوط تلتقي فيها، والتي تكون عادة في الأفق، تُدعى **نقطة التلاشي Vanishing Point** في الرسم المنظوري.

للقطعتَين المستقيمتَين $AB$ وَ $CD$ الظاهرتَين في الصورة أدناه، الطول نفسه في الحقيقة. عندما يتم إسقاطهما على مستوي الصورة الذي يراه الناظر، فإن صورة $\overline{AB}$ تبدو أطول من صورة $\overline{CD}$ .

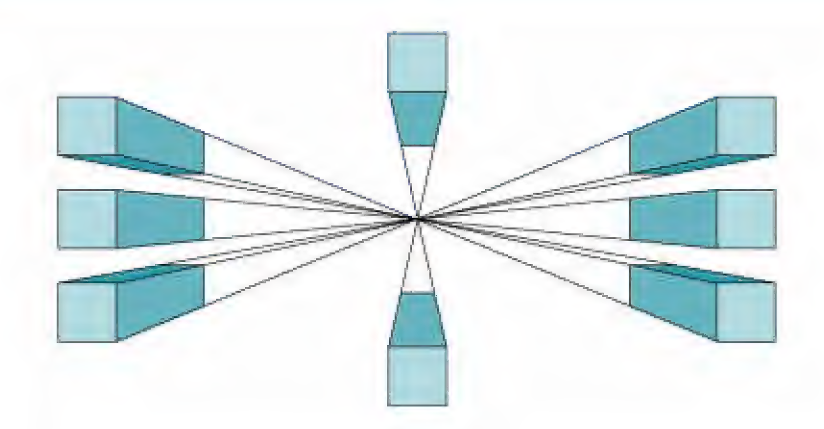


## Principles of Perspective Drawing قواعد الرسم المنظوري

توفِّر القاعدتان الواردتان في هذا الدرس الأساس لفهم مبادئ الرسم المنظوري. من الممكن البرهنة على صحة هاتَين القاعدتَين، بدراسة الطريقة التي يتمّ بها إسقاط الخطوط المتوازية على مستوى الصورة في الرسم المنظوري.

### Principle 1: Sets of Parallel Lines القاعدة 1: مجموعات الخطوط المتوازية

في الرسم المنظوري، جميع المستقيمات المتوازية، والتي لا توازي مستوى الصورة، تلتقي في نقطة واحدة تُدعى **نقطة التلاشي Vanishing Point**.



**نقطة مراقبة √** هل تعتقد أن النقطة، التي تبدو فيها جميع المستقيمات المتوازية وكأنَّها تلتقي، يجب أن تكون في الرسم؟ استعمل صورة لتوضح رأيك.

### Principle 2: Lines Parallel to the Ground القاعدة 2: الخطوط الموازية للأرض

في الرسم المنظوري، كل مستقيم يقع في مستوى الأرض وغير موازٍ لمستوى الصورة، يلتقي خط الأفق في نقطة، وكل مستقيم موازٍ له يلتقي خط الأفق في النقطة نفسها.



**نقطة مراقبة √** المستقيمات المتوازية، والموازية لمستوى الصورة في الرسم المنظوري، تُرسَم عادة من دون نقطة تلاشٍ. تُجنِّب هذه التقنية في أغلب الإحيان حدوث إشكالات. هل يُمكنك ذكر وضعيات تُنتِج فيها هذه التقنية رسوماً غير واقعية؟

**نقطة مراقبة √** يمكن تطبيق مفهوم نقطة التلاشي في الرسم المنظوري، وإن لم يكن هناك مستقيمات متوازية ظاهرة في الرسم. في صف الصحون اللاقطة المبيَّن أدناه، مستقيمات وهميَّة تمرّ عبر النقاط التي تقع في أعلى الصحون والنقاط التي تقع في أسفلها. هذه المستقيمات تلتقي في الأفق. علِّل ذلك.



استفادت الهندسة المعمارية كثيرًا من مفهوم الرسم المنظوري، وشكَّلت موضوعاته الأولى. وقد مثّلت البيوت والعمارات نموذجًا مثاليًّا لتطوير مفهوم الرسم المنظوري، ذلك أنها تحتوي على الكثير من المستقيمات المتوازية فيما بينَها والموازية للأرض.

# التمــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

1 ماذا تعني نقطة التلاشي في الرسم المنظوري؟

2 لماذا ينتهي عند الأفق كلّ مستقيم يقع في مستوي الأرض وغير موازٍ لمستوي الصورة؟ ارسم صورة لتوضح إجابتك.

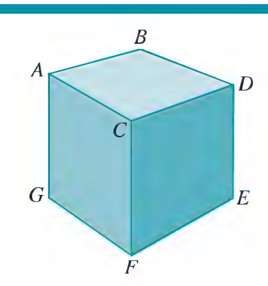


3 لِمَ تمثِّل رسوم العمارات والبيوت نموذجًا مثاليًّا لتطبيقات مفهوم الرسم المنظوري؟ أنشئ رسمًا لتوضح إجابتك.

4 يُمثَّل الأفق في الرسم المنظوري بمستقيم أفقي يُفترض أن يكون على مستوى العين. لِمَ وُضع هذا الافتراض في رأيك؟

**نقطة مراقبة √** 5 للدبَّين القطبيَّين الظاهريَن في الصورة، الطول نفسه. غير أن أحدهما يبدو أطول من الآخر. علِّل ذلك.

## تمارين موجَّهة




6 الرسم المقابل رسم منظوريّ لمكعَّب. ماذا تقول عن المستقيمات $AB$ وَ $CD$ وَ $EF$ ؟ ماذا تقول عن المستقيمات $AC$ وَ $BD$ وَ $GF$ ؟

7 المستقيمات العمودية في رسم المكعَّب المقابل لا تلتقي في نقطة تلاش. علِّل ذلك مستعملاً قواعد الرسم المنظوري.

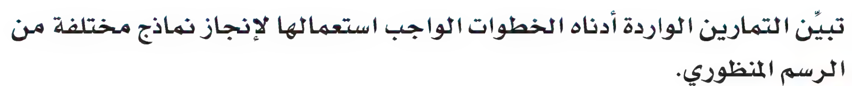
8 تخيَّل أن رسم المكعَّب السابق يمثِّل بناء على مستوي الأرض. أين تلتقي المستقيمات التي تمثِّل الحدود غير العمودية للبناء؟

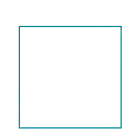
## تمارين وتطبيقات

**تبيِّن التمارين الواردة أدناه الخطوات الواجب استعمالها لإنجاز نماذج مختلفة من الرسم المنظوري.**

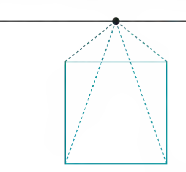
9 يُسمّى الرسم المنظوري، الذي يتضمَّن نقطة تلاشٍ واحدة، **رسمًا بنقطة تلاشٍ واحدة.**

أ ارسم مربّعًا ثم ارسم مستقيمًا أفقيًّا لتمثيل الأفق، واختر عليه نقطة تلاشٍ.

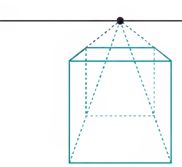




ب ارسم قطعة مستقيمة منقَّطة ورفيعة بين كل رأس من رؤوس المربّع ونقطة التلاشي.



ج ارسم، مربَّعًا منقَّطًا أصغر من الأوَّل، تقع رؤوسه على القطع المستقيمة التي رسمتها في ب.



د احذف من الرسم كل ما يقع خلف المربَّع الصغير. تشير القطع المستقيمة المنقَّطة التي تبقى في الرسم إلى حدود المكعَّب المستورة.

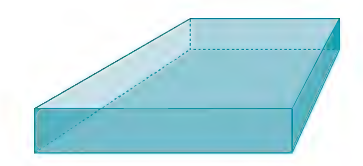


**10** كرِّر خطوات التمرين 9، مع وضع نقطة التلاشي إلى يسار المربَّع أو يمينه.

**11** كرِّر خطوات التمرين 9 مع وضع خط الأفق ونقطة التلاشي تحت المربَّع.

**12** ماذا يحدث لو كانت نقطة التلاشي داخل المربَّع، أو على أحد أضلاعه؟

**انسخ الرسم التالي على ورقتك، لحلّ التمرينَين 13 وَ 14.**

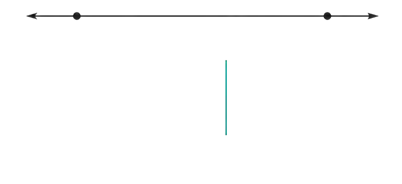


**13** حدِّد نقطة التلاشي في الرسم.

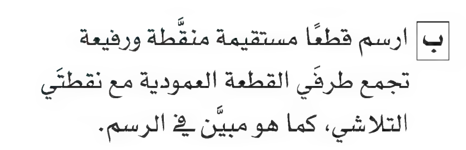
**14** ارسم خطّ الأفق.

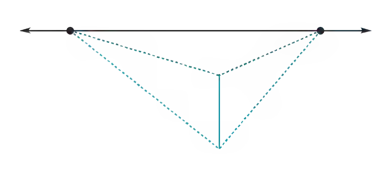
**15** يُسمّى الرسم المنظوري الذي يتضمَّن نقطتَي تلاشٍ **رسمًا بنقطتَي تلاشٍ.**

أ ارسم قطعة مستقيمة عمودية تمثِّل الضلع الأمامي للمكعَّب. ارسم خط الأفق فوق هذه القطعة، واختر عليه نقطتَي تلاشٍ تكونان على جهتَي القطعة المستقمية، كما هو مبيَّن في الرسم المقابل.

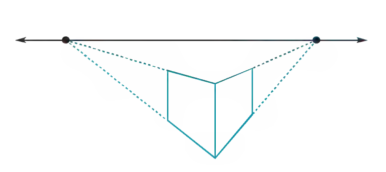


ب ارسم قطعًا مستقيمة منقَّطة ورفيعة تجمع طرفَي القطعة العمودية مع نقطتَي التلاشي، كما هو مبيَّن في الرسم.

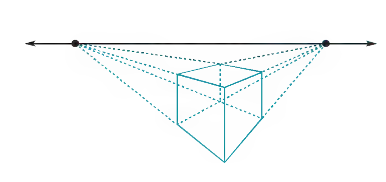




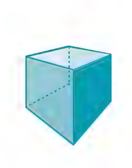
ج ارسم قطعًا مستقيمة عموديَّة لإكمال أضلاع الوجوه الأمامية للمكعَّب.



د ارسم قطعًا مستقيمة رفيعة ومنقّطة تجمع أطراف القطع التي رسمتها في ج مع نقطتَي التلاشي. ارسم قطعة عمودية منقَّطة تجمع نقطتَي التقاء مستقيمات الرسم المنظوري.



هـ احذف كل ما هو خارج حدود المكعَّب. استعمل القطع المستقيمة المنقَّطة للدلالة على حدود المكعَّب المستورة.



16 كرِّر خطوات التمرين 15، مع وضع خط الأفق، ونقطتَي التلاشي تحت القطعة العمودية.

17 كرِّر خطوات التمرين 15، مع وضع خط الأفق، بطريقة يلتقي فيها مع القطعة المستقيمة العمودية.

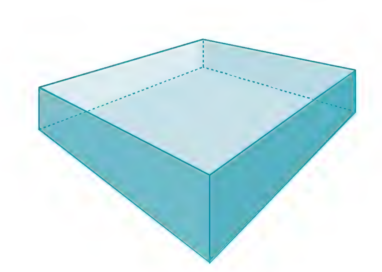
18 ماذا يحدث لرسمٍ بنقطتَي تلاشٍ إذا تقاربت النقطتان؟ إذا تباعدتا؟

19 ماذا يحدث لرسمٍ بنقطتَي تلاشٍ إذا كانت النقطتان على الجهة نفسها من القطعة المستقيمة العموديَّة؟

**انسخ الرسم التالي على ورقتك، لحلّ التمرينَيْن 20 وَ 21.**

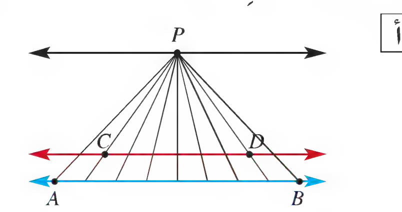
20 حدِّد نقطتَي التلاشي في هذا الرسم.

21 ارسم خط الأفق.

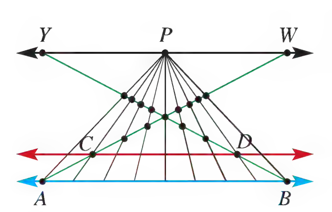


**شكَّل الرصف والفسيفساء أمرًا جذّابًا للفنّانين والرسّامين الذين بدأوا بدراسة الرسم المنظوري. تُوحي الرسوم التالية بتقنية معيَّنة لإنتاج نمط رصف في عملية الرسم المنظوري. ادرسِ الرسوم أدناه لحل التمارين من 22 إلى 24.**

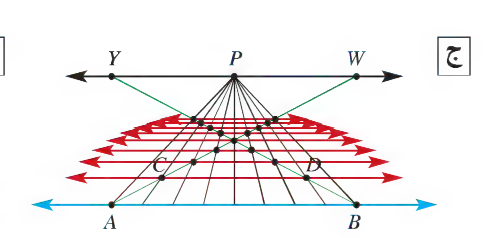
أ



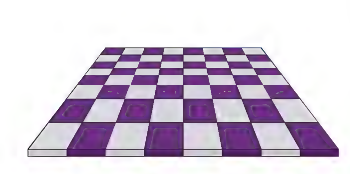

ب




ج




د



22 يمكنك استعمال القُطرَين $\overleftrightarrow{BY}$ وَ $\overleftrightarrow{AW}$ لإيجاد المستقيمات الموازية للمستقيم $AB$. كيف تستعمل القُطرَين لتحديد هذه المستقيمات؟

23 كيف يمكن رؤية النمط الرصفي من زاوية من الزوايا باستعمال نقطتَي تلاشٍ؟ كيف تحدَّد المستقيمات المتقاطعة؟

24 أنشئ تمثيلك الخاص عندما تستعمل نقطة تلاشٍ واحدة، أو نقطتَي تلاشٍ، لرصف المربَّع.

## نظرة إلى الوراء

**هل المستقيمان، في كل تمرين، متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك؟**

**25** $y=3x+5$
$y=3x-7$

**26** $y=x+2$
$y=2-x$

**27** $y=2x-1$
$y=-2x+4$

**28** $2x+3y=6$
$3x-2y=6$

**29** $ABCD$ مستطيل قُطراه $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$ . برهن أن المثلَّثَين $ACD$ وَ $BCD$ متطابقان.




# المضلَّعات المُنتظَمة Regular Polygons



**لماذا**

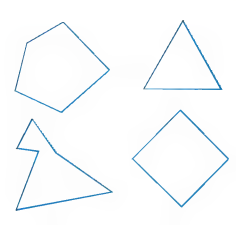
كيفما نظرت إلى الأشغال اليدوية المحيطة بك، تجد مضلّعات. يساعدك فهم الخصائص الرياضيّة للمضلّعات على استعمالها لأهداف فنيّة وعمليّة.

**الأهداف**

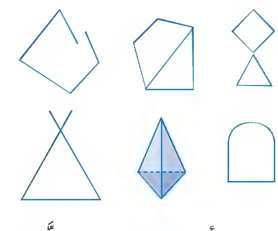
- يُميِّز المضلّعات ويسمّيها.
- يُميِّز المضلّعات المُنتظمة وعناصرها.
- يحسب زواياها المضلعات المنتظمة الداخلية والمركزية، كما يحسب مساحتها.

## المضلّعات Defining Polygons

أمعن النظر في الأشكال التالية، واقترح تعريفًا للمضلّع.



هذه الأشكال مضلّعات



هذه الأشكال ليست مضلّعات

قارن التعريف الذي اقترحته للمضلّع مع التعريف الوارد أدناه. هل يُغطّي تعريفك كلَّ ما في التعريف أدناه؟ هل يحتوي على مُعطيات أكثر؟

### المضلّع Polygon

**المضلّع** هو الشكل الهندسي المستوي المكوَّن من ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، بحيث تتقاطع كل منها مع اثنتين أخريين فقط، واحدة عند كل نقطة طرف، وبحيث لا تكون قطعتان متتابعتان على استقامة واحدة. تُسمّى القطع المستقيمة **أضلاع المضلّع Sides**، وتُسمّى نقاط تقاطعها **رؤوس المضلّع Vertices**.

تُطلَق على المضلَّعات تسميات مختلفة، وفقًا لعدد أضلاعها. تمرَّن على تسميات المضلَّعات الواردة في الجدول التالي:

### تصنيف المضلَّعات وفقًا لعدد أضلاعها

| الاسم | | عدد الأضلاع | الاسم | | عدد الأضلاع |
|---|---|---|---|---|---|
| مُثلَّث | Triangle | 3 | تُساعي | Nonagon | 9 |
| رُباعي | Quadrilateral | 4 | عُشاري | Decagon | 10 |
| خُماسي | Pentagon | 5 | مضلَّع أحد عشري | 11-gon | 11 |
| سُداسي | Hexagon | 6 | مضلَّع اثناعشري | Dodecagon | 12 |
| سُباعي | Heptagon | 7 | مضلع ثلاثة عشري | 13-gon | 13 |
| ثُماني | Octagon | 8 | مضلع نوني | n-gon | $n$ |

## زوايا المضلَّع Angles of a Polygon

### النشاط 1

### مجموع الزوايا الداخلية Sums of Interior Angles

قسِّم الخماسيّ المقابل إلى 3 مثلَّثات، برسم أقطاره المنطلقة من أحد رؤوسه.

A B C D E 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. ما مجموع الزوايا 1 وَ 2 وَ 3؟
2. ما مجموع الزوايا 4 وَ 5 وَ 6؟
3. ما مجموع الزوايا 7 وَ 8 وَ 9؟
4. ما مجموع الزوايا 1 وَ 2 وَ 3 وَ 4 وَ 5 وَ 6 وَ 7 وَ 8 وَ 9؟
5. استنتج من الأسئلة السابقة مجموع الزوايا الداخليَّة للخُماسي.
6. استعمل الطريقة السابقة لإكمال الجدول التالي:

| المضلَع | عدد الأضلاع | عدد المثلَّثات | مجموع قياسات الزوايا الداخلية |
|---|---|---|---|
| مثلَّث | ? | 1 | 180 درجة |
| رُباعي | ? | ? | ? |
| خُماسي | ? | 3 | 540 درجة |
| سُداسي | ? | ? | ? |
| مُضلَّع نوني | ? | ? | ? |

7. اكتب قاعدة لحساب مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلَّع، بدلالة عدد أضلاعه. أكمل القاعدة التالية:

نقطة مراقبة √

#### مجموع الزوايا الداخلية للمضلَّع Sum of the Interior Angles of a Polygon

مجموع الزوايا الداخلية لمضلَّع عدد أضلاعه $n$، هو ____؟____ درجة.

نقول عن مضلَّع إنه **مُنتظَم Regular** إذا تساوت أطوال أضلاعه وتساوت قياسات زواياه الداخليَّة. المضلَّع المنتظم بثلاثة أضلاع هو المثلَّث المُنتظم. والمضلَّع المُنتظم بأربعة أضلاع هو المربَّع.

**مركز المضلَّع المنتظم Center** هو النقطة التي تقع على المسافة نفسها من جميع رؤوسه. الزاوية، التي رأسها مركز المضلَّع المُنتظم ويمرّ ضلعاها برأسَين متجاورَين من رؤوسه هي **زاوية مركزية Central Angle** للمضلَّع المُنتظم. جميع الزوايا المركزية في المضلَّع المُنتظم متساوية القياس.

**نقطة مراقبة √** أكمل الجدول التالي، ثم أكمل القاعدة التي تليه.

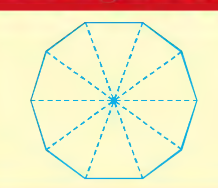
| المضلَّع المنتظم | عدد الأضلاع | مجموع الزوايا الداخليَّة | قياس كل زاوية داخليَّة |
|---|---|---|---|
| مثلَّث | ? | 180 درجة | ? |
| مربَّع | ? | ? | 90 درجة |
| خُماسي | ? | ? | ? |
| سُداسي | ? | ? | ? |
| مُضلَّع نوني | ? | ? | ? |

### قياس الزاوية الداخلية في المضلَّع المُنتظم
**The Measure of an Interior Angle of a Regular Polygon**

قياس كل زاوية داخليَّة، لمضلع مُنتظم عدد أضلاعه $n$، هو ____؟____ درجة.

## النشاط 2

### الزوايا المركزيَّة في المضلَّع المُنتظم Central Angles of a Reguler Polygon



1. ما مجموع قياسات الزوايا المركزية في المضلَّع المُنتظم؟

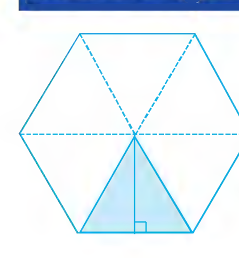
**نقطة مراقبة √**

2. أكمل القاعدة التالية:

### قياس زاوية مركزية في المضلَّع المُنتظم
**The Measure of a Central Angle of a Regular Polygon**

قياس كل زاوية مركزية لمضلَّع مُنتظم عدد أضلاعه $n$، هو ____؟____ درجة.

## مساحة المضلَّع المُنتظم Area of a reguler polygonr

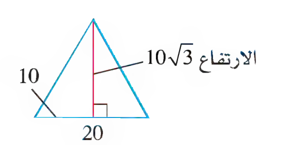


**عامد المضلَّع المُنتظم Apothem** هو القطعة المستقيمة التي تصل مركز المضلَّع بمُنتصف أحد أضلاعه. تلاحظ أن العامد هو ارتفاع أيٍّ من المثلَّثات المتوازنة التي يكون رأسها مركز المضلَّع المُنتظم، وقاعدتها أحد أضلاعه. لإيجاد مساحة السداسيّ المُنتظم، نقسمه إلى 6 مثلثات متجاورة ومتطابقة. مساحة السداسيّ المُنتظم تساوي 6 أضعاف مساحة كلّ من تلك المثلَّثات.

**مثال 1** احسب مساحة سداسيّ منتظم طول ضلعه 20cm .

**الحل**

لكي تحسب مساحة السداسي ينبغي أن تحسب أوّلاً مساحة كلّ من المثلّثات الستة التي تشكّل السداسي. كل مثلّث من هذه المثلّثات هو مثلّث متوازن. من ناحية أخرى، فإنّ زاوية رأس المثلّث هي زاوية مركزية من زوايا السداسيّ المنتظم. قياسها يساوي $360 \div 6 = 60°$ . ينتج من ذلك أن كلاًّ من المثلّثات الستّة مثلّث مُنتظم طول ضلعه 20cm. عامد السداسيّ المُنتظم هو، إذًا، ارتفاع هذا المثلّث المُنتظم. إذًا، طول العامد يساوي: $20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ .




مساحة كلّ مثلّث تساوي $\frac{1}{2}(20)(10\sqrt{3}) = 100\sqrt{3}$ .

مساحة السداسي المُنتظم تساوي $6(100\sqrt{3}) = 600\sqrt{3}$ .

إذًا مساحة السداسي $600\sqrt{3}\ cm^2$ ، أي $1039cm^2$ تقريبًا.

يُمكنك استعمال الطريقة السابقة لحساب مساحة مضلَّع مُنتظم عدد أضلاعه $n$. يمكن تقسيم هذا المضلَّع إلى $n$ مثلّثًا من المثلّثات المتطابقة.

**مساحة المضلَّع المُنتظم** **Area of a Regular Polygon**

تُحسب مساحة مضلَّع منتظم عامده $a$ ومحيطه $p$، باستعمال القاعدة التالية $A = \frac{1}{2}ap$ .



**مثال 2** احسب مساحة الخُماسيّ المنتظم المقابل.




**الحل**




محيط الخُماسيّ المُنتظم يساوي $5 \times 10 = 50$ .

مساحة الخُماسيّ المُنتظم تساوي $\frac{1}{2} \times 6.88 \times 50 = 172$ .

مساحة الخُماسيّ المُنتظم $172cm^2$.

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1. هل تستطيع رسم رباعي له ثلاث زوايا داخليّة قياس كل منها 60 درجة؟ علِّل جوابك.
2. المثلَّث المُنتظم مضلّع مُنتظم من ثلاثة أضلاع. ما هو عامده؟
3. المربَّع مضلّع مُنتظم من أربعة أضلاع. ما هو عامده؟

## تمارين موجَّهة

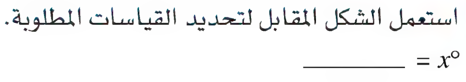
4 ما مجموع قياسات الزوايا الداخليَّة لمُضلّع ثماني؟

5 ما مجموع قياسات الزوايا الداخليَّة لمضلَّع ثلاثة عشريّ؟

6 ما مجموع قياسات الزوايا الداخليَّة لمُضلّع سباعي؟

7 ما مجموع قياسات الزوايا الداخليَّة لمضلَّع أحد عشريّ؟

## تمارين وتطبيقات



8 استعمل الشكل المقابل لتحديد القياسات المطلوبة.

$x^\circ =$ ________

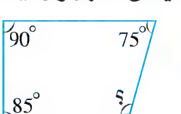
$y^\circ =$ ________

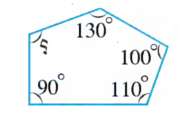
$z^\circ =$ ________

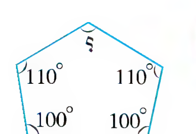
9 ما مساحة سداسيّ مُنتظم ضلعه 12cm؟

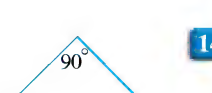
10 احسب مساحة مضلَّع عُشاريّ مُنتظم ضلعه 6m وعامده 9.23m.

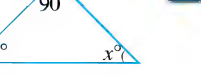
**جد القياس المجهول في كلّ من التمارين 11–14.**

11



12



13



14




**في التمارين من 15 إلى 18، حدّد قياس الزاوية الداخلية للمضلّع.**

15 مربَّع

16 مثلَّث مُنتظم

17 مضلَّع مُنتظم اثنا عشريّ

18 خُماسيّ مُنتظم

**ما عدد أضلاع المضلَّع المُنتظم، إذا كان قياس كلّ من زواياه الداخليَّة يساوي:**

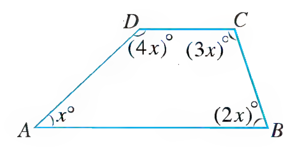
19 $135^\circ$؟

20 $150^\circ$؟

21 $165^\circ$؟

الجبر

**لحلّ التمارين من 22 إلى 25، حدّد قياس الزاوية مستعينًا بالشكل المقابل.**




22 الزاوية $A$

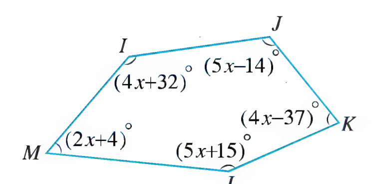
23 الزاوية $B$



24 الزاوية $C$

25 الزاوية $D$

**لحلّ التمارين من 26 إلى 30، حدِّد قياس الزاوية مستعينًا بالشكل المقابل.**




**26** الزاوية $I$

**27** الزاوية $J$

**28** الزاوية $K$

**29** الزاوية $L$

**30** الزاوية $M$

**احسب محيط كلّ مضلَّع منتظم ومساحته. أعطِ الجواب على شكل مقدار جذريّ، بأبسط صورة ممكنة.**

**31** مثلَّث مُنتظم ضلعه 8cm.

**32** سُداسيّ مُنتظم ضلعه 13cm.

**33** مربَّع قطره 14cm.

**34** ثُمانيّ مُنتظم عامده 5m.

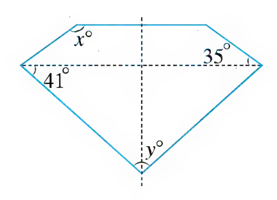
**35** ما العدد الأكبر من الزوايا الحادة في مثلَّث؟ هل من مثلَّث لا يتضمَّن زاوية حادّة؟ علِّل جوابك.

**36** ما العدد الأكبر من الزوايا الحادَّة في رُباعيّ؟ هل من رباعيّ لا يتضمَّن زاوية حادّة؟ علِّل جوابك.

**37** ما العدد الأكبر من الزوايا الحادَّة في خُماسي؟ هل من خماسي لا يتضمَّن زاوية حادَّة؟ علِّل جوابك.

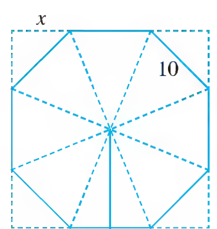
**تطبيــــقات**

**38** **أحجار كريمة** يتم قطع الماس على هيئة البرلنت، لتعزيز قدرته على عكس الضوء. وتتحدَّد زاوية القطع وفقًا لخاصّيَّة الحجر في كسر أشعة الضوء. يبيِّن الشكل المقابل القطّع الأفضل لحجر الماس، بحيث يتمتَّع هذا القطع بمحوَر تناظر.
احسب زوايا هذا الشكل.




**لحل التمارين من 39 إلى 42، استعمل الشكل المقابل الذي يمثِّل ثُمانيًا مُنتظمًا داخل مربَّع.**

**39** ما نوع المثلَّثات التي رؤوسها رؤوس المربّع، والتي تقع خارج الثماني المُنتظم؟ احسب قيمة $x$.




**40** احسب عامد الثماني المُنتظم.

**41** احسب مساحة الثماني المُنتظم.

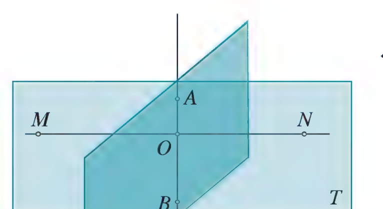
**42** ما مساحة ثماني مُنتظم طول ضلعه $y$؟

**43** هل من مضلَّع مُنتظم قياس كلّ من زواياه المركزية 50 درجة؟ علِّل جوابك.

**44** هل من مضلَّع مُنتظم قياس كلّ من زواياه الداخليَّة 30 درجة؟ علِّل جوابك.

## نظرة إلى الوراء

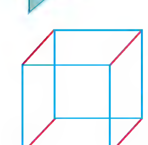
**لحل التمارين من 45 إلى 47، استعمل الشكل المقابل.**




**45** سَمِّ تقاطع المستقيمَين $AB$ وَ $MN$.

**46** سَمِّ ثلاث نقاط تحدِّد المستوى $T$.

**47** سَمِّ تقاطع المستويَين $T$ وَ $S$.



**48** يُبيِّن الشكل المقابل مكعَّبًا. ماذا تقول عن المستقيمات التي تحمل الأضلاع الحمراء.

**49** ماذا يحدث إذا مددت الأضلاع الحمراء؟

## نظرة إلى الأمام



**50** ارسم، في المستوى الإحداثيّ نفسه، النقطة $A(2, 2)$ والنقطة $B(4, 1)$ .

**51** اضربْ كلاًّ من إحداثيَّي النقطة $A$ في 3، تحصل على إحداثيي نقطة جديدة $C$. ارسم النقطة $C$.

**52** اضربْ كلاًّ من إحداثيَّي النقطة $B$ في 3، تحصل على إحداثيي نقطة جديدة $D$. ارسم النقطة $D$.

**53** ماذا تقول عن المستقيمَين $AB$ وَ $CD$؟ علِّل جوابك.

**54** لو استعملت 4 عوضًا عن 3 في التمرينَين 52 وَ 53، فهل يتغيَّر حكمك على المستقيمَين $AB$ وَ $CD$؟




# التناسب الهندسي (التحاكي) Dilation



**الأهداف**

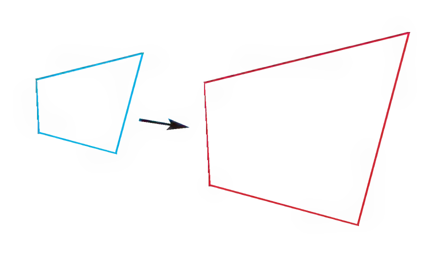
- يُميِّز التناسب الهندسيّ وعناصره.
- يُنشئ صورة شكل بتناسب هندسي.

**لماذا**

عندما تصوَّر إنسانًا بآلة تصوير كلاسيكيّة، تتشكّل في الحجرة المظلمة للآلة صورة مقلوبة لهذا الإنسان. يمكنك إيضاح ذلك باستعمال التناسب الهندسيّ.

يعود اكتشاف المبدأ الذي يحكم عمل آلة التصوير إلى العالم العربي ابن الهيثم، الذي عاش في فترة 965–1 039 م.

درستَ حتى الآن ثلاثة تحويلات هندسية: السحب والانعكاس والدوران. تتميَّز هذه التحويلات بخاصّيّة مهمَّة، هي حفظ الهيئة والقياسات. نقول عن هذه التحويلات إنها تحفظ القياس، أو إنها **متقايسة Isometric**.



سوف تتعرَّف في هذا الدرس نوعًا جديدًا من التحويلات، يحفظ الهيئة دون حفظ القياسات. إنه **التناسب الهندسيّ Dilation**.

## التناسب الهندسيّ Dilation

تحصل على صورة النقطة $A(x, y)$ بتناسب هندسيّ، بضرب كل من إحداثيَّيْها في العدد نفسه الذي يُسمّى **نسبة التناسب (عامل التحاكي) Scale Factor**. إذًا، صورة النقطة $A(x, y)$، بتناسبٍ هندسيٍّ نسبته $n$، هي النقطة $(nx, ny)$ .

**مثال 1** **ما صورة النقطة $(2, 3)$ بتناسب هندسي نسبته 4؟**

الحل

النقطة $(2\times4,\ 3\times4)=(8, 12)$ .

## النشاط 1

## التناسب الهندسيّ إحداثيًّا Dilations in The Coordinate Plane

1. ارسم النقطة $A(3, 4)$ في المستوي الإحداثيّ. استعمل قانون المسافة بين نقطتَين لحساب المسافة بين النقطة $A$ ونقطة الأصل $O$ في المستوي الإحداثيّ. أكمل الجدول أدناه عن طريق تحديد إحداثيَي النقطة $A'$ ، صورة النقطة $A$ بتناسب هندسيّ نسبته مُبيّنة في العمود الثالث:

| النقطة $A$ | $OA$ | نسبة التناسب | الصورة $A'$ | $OA'$ | $\frac{OA'}{OA}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (3, 4) | ? | 2 | ? | ? | ? |
| (3, 4) | ? | 0.5 | ? | ? | ? |
| (3, 4) | ? | −1 | ? | ? | ? |
| (3, 4) | ? | $n$ | ? | ? | ? |

2. ارسم النقطة $A$ وصورتها $A'$ في كل حالة. ماذا تلاحظ على جميع هذه النقاط؟

3. أكمل الفرضيَّة التالية:

**فرضيّة Conjecture**

نقطة مراقبة √

**إذا كانت $A'$ صورة $A$ بتناسب هندسي نسبته $n$، فإن $OA \times$ ____؟____ $= OA'$ .**

4. ارسم النقطة $A(3, 4)$ من جديد، وارسم معها النقطة $B(5, 6)$ . أكمل الجدول التالي:

| النقطة $B$ | $AB$ | نسبة التناسب | الصورة $B'$ | $A'B'$ | $\frac{A'B'}{AB}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (5, 6) | ? | 2 | ? | ? | ? |
| (5, 6) | ? | 0.5 | ? | ? | ? |
| (5, 6) | ? | −1 | ? | ? | ? |
| (5, 6) | ? | $n$ | ? | ? | ? |

الجبر

5. أكمل الفرضيَّة التالية:

**فرضيّة**

نقطة مراقبة √

**إذا كانت $\overline{A'B'}$ صورة القطعة المستقيمة $AB$ بتناسب هندسيّ نسبته $n$ ، فإن $AB \times$ ____؟____ $= A'B'$ .**

6. احسب ميَل المستقيم $AB$.

7. احسب ميَل المستقيم $A'B'$ في كل حالة.

8. أكمل الفرضيَّة التالية:

**فرضيّة**

**يحوّل التناسب الهندسيّ قطعة مستقيمة إلى قطعة مستقيمة ____؟____ .**

جميع المستقيمات التي تمر بنقطة وبصورتها بتناسب هندسي معيَّن تلتقي في نقطة واحدة تُسمّى **مركز التناسب Center of Dilation**. جميع التناسبات الهندسيَّة في النشاط 1 كان مركزها نقطة الأصل. لكل تناسب هندسي مركز تناسب.

**تطبيـــقات**
**ضوء**

يتّسع بؤبؤ العين أو يضيق ليسمح بمرور ما يلزم من الضوء، لكي يتمكّن المرء من رؤية الأشياء. فهو يضيق في النهار ويتّسع في الليل. في آلة التصوير شيء يماثل البؤبؤ، للتحكُّم في كمّية الضوء الضروريَّة لنجاح الصورة.





بؤبؤ العين في الصورة اليسرى منقبض، لأن كمّيَّة الضوء كبيرة، في حين أنه متّسع في الصورة اليمنى، لأن كمّيَّة الضوء صغيرة.

لاحظتَ خلال النشاط 1 أن طول صورة القطعة المستقيمة يتغيَّر بتغيُّر نسبة التناسب. عندما تكون قياسات الصورة أصغر من قياسات الشكل الأصلي، تقول عن التناسب إنه **تصغير Contraction**. وعندما تكون قياسات الصورة أكبر من قياسات الشكل الأصلي، تقول عن التناسب إنه **تكبير Expansion**.

**تفكير ناقد** ما الذي يحصل لصورة نقطة أو قطعة مستقيمة بتناسب هندسيّ نسبته سالبة؟

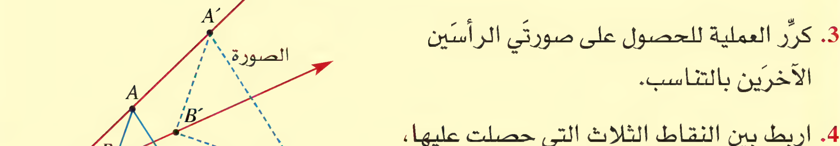
## النشاط 2

## رسم صورة شكل بتناسب هندسي Drawing a Dilation

1. ارسم مثلّثًا ونقطة خارجه $M$ تمثّل مركز تناسب. ارسم المستقيمات التي تمر بمركز التناسب وبكلّ من رؤوس المثلَّث.

2. اختر عددًا موجبًا $n$ ليكون نسبة التناسب. اختر رأسًا من رؤوس المثلَّث وليكن $B$، وقِس المسافة $x$ بينه وبين مركز التناسب. اضرب المسافة $x$ في نسبة التناسب $n$ لتحصل على المسافة بين مركز التناسب $M$ والصورة $B'$ للرأس $B$. ارسم على نصف المستقيم $MB$، النقطة $B'$ التي تبعد عن مركز التناسب المسافة $nx$. هذه النقطة $B'$ هي صورة الرأس $B$ بالتناسب.

3. كرِّر العملية للحصول على صورتَي الرأسَين الآخرَين بالتناسب.






**نقطة مراقبة √**

4. اربط بين النقاط الثلاث التي حصلت عليها، ليتكوَّن لديك مثلّث جديد هو صورة المثلّث الأساسي بالتناسب الهندسيّ.

## مثـــال 2

**تطبيـــقات**
**فلك**

تبيِّن الصورة التالية طالبَيْن يراقبان كسوف الشمس من خلال ثقب صغير. لكي تفهم العملية، تصوَّر أن الأمر يتعلق بصورة الشمس بتناسب يقع مركزه في الثقب الصغير. يبلغ قطر الشمس 1 400 000km تقريبًا. ما معدَّل التناسب إذا بلغ قطر صورة الشمس 0.63cm؟



### الحــل

الشمس
الثقب
الصورة

يبيّن الشكل المقابل مسار أشعة الشمس انطلاقًا من أطراف الشمس كما تراها من الأرض. نسبة التناسب سالبة، لأن صورة الشمس تقع في الجانب الآخر بالنسبة إلى مركز التناسب (الثقب الصغير). للحصول على نسبة التناسب، بقيمته المطلقة، اقسم قطر الصورة على قطر الشمس على النحو التالي:

$$\frac{0.63}{1400000 \times 100000} = \frac{0.63}{1.4 \times 10^{11}} = \frac{63}{140} \times 10^{-11} = 4.5 \times 10^{-12}$$

# التمـــــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

**1** ما الذي يميِّز التناسب الهندسيّ من التحويلات الهندسية الأُخرى التي تعرفها؟

**2** ما نسبة التناسب الهندسيّ؟ كيف تحدِّد نسبة تناسب هندسيّ بمعرفة قطعة مستقيمة وصورتها؟

**أوضح أثر التناسب الهندسيّ على صورة شكل هندسيّ، إذا كانت نسبته تساوي:**

**3** $2$ **4** $0.5$ **5** $-1$ **6** $1$

## تمارين موجَّهة

**في التمارين من 7 إلى 10 مركز التناسب الهندسيّ هو نقطة الأصل. حدِّد صورة النقطة في كل مرّة، ثم ارسم النقطة وصورتها في المستوي الإحداثيّ.**

**7** النقطة: $(1, 5)$ ؛ النسبة: $3$

**8** النقطة: $(-1, 4)$ ؛ النسبة: $2$

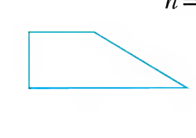
**9** النقطة: $(6, -2)$ ؛ النسبة: $0.25$

**10** النقطة: $(2, 3)$ ؛ النسبة: $-2$

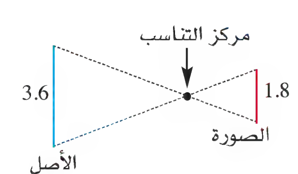
**انسخ الشكل ومركز التناسب، ثم ارسم صورة الشكل بتناسب نسبته $n$.**

**11** $n=2$

**12** $n=-1$



**13** يبيِّن الشكل المقابل قطعة مستقيمة وصورتها بتناسب هندسيّ. ما نسبة هذا التناسب؟




## تمارين وتطبيقات

الجبر

**يتضمَّن كل تمرين من التمارين 14-17 رؤوس شكل هندسيّ، ونسبة تناسب هندسيّ مركزه نقطة الأصل في المستوي الإحداثيّ. حدِّد صورة كل رأس من رؤوس الشكل، ثم ارسم الشكل الأصلي وصورته في المستوي الإحداثيّ.**

**14** $(1, 3)$؛ $(2, 5)$؛ $(4, 3)$؛ النسبة: $2$

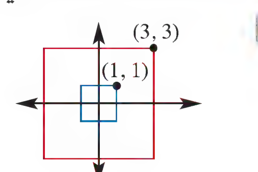
**15** $(-3, 5)$؛ $(8, 9)$؛ $(2, -6)$؛ النسبة: $\frac{1}{3}$

**16** $(0, 0)$؛ $(6, 0)$؛ $(4, 4)$؛ $(2, 3)$؛ النسبة: $-\frac{1}{2}$

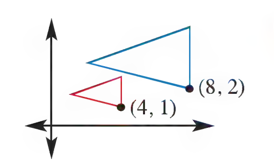
**17** $(1, 1)$؛ $(3, -1)$؛ $(-2, -3)$؛ النسبة: $1.6$

**يتضمَّن كل تمرين من التمارين 18–21 شكلَين أحدهما أحمر والثاني أسود. يمثِّل الشكل الأحمر صورة الشكل الأسود بتناسب هندسيّ مركزه نقطة الأصل في المستوي الإحداثيّ. حدِّد نسبة التناسب الهندسيّ في كل مرَّة.**

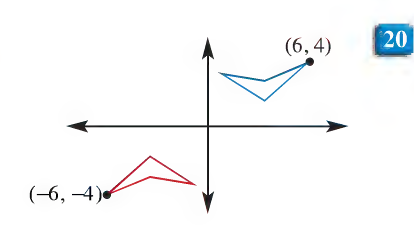
**18**



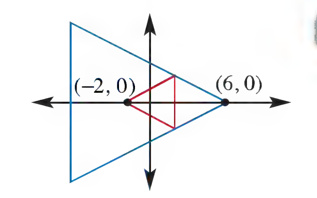

**19**



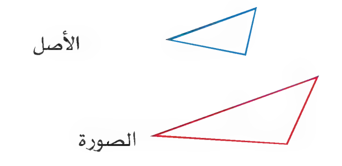

**20**




**21**




**22** انسخ الرسم المقابل. حدِّد مركز التناسب ونسبته.




**يتضمَّن كل تمرين من التمارين 23–26 إحداثيَّي طرفَي قطعة مستقيمة، ونسبة تناسب هندسي مركزه نقطة الأصل في المستوي الإحداثيّ. بيِّن باستعمال المَيل أن صورة القطعة المستقيمة بالتناسب الهندسيّ هي قطعة مستقيمة موازية للأصل.**

**23** $(1, 0)$ وَ $(5, 3)$؛ $n = 2$

**24** $(-2, 3)$ وَ $(3, 1)$؛ $n = 5$

**25** $(-2, 4)$ وَ $(4, 8)$؛ $n = \frac{1}{2}$

**26** $(1, 1)$ وَ $(2, 4)$؛ $n = 1.7$

الجبر

**يتضمَّن كل تمرين من التمارين 27–30 إحداثيَّي نقطة، ونسبة تناسب هندسيّ مركزه نقطة الأصل في المستوي الإحداثيّ. تحقَّق من أن المستقيم، المارّ بالنقطة وصورتها بالتناسب الهندسي، يمر بنقطة الأصل في المستوي الإحداثيّ.**

**27** $(1, 5)$؛ $n = 4$

**28** $(3, -2)$؛ $n = \frac{5}{6}$

**29** $(-5, 3)$؛ $n = -3$

**30** $(7, 4)$؛ $n = 2.5$

تحــــدٍّ

**31** من الأمثلة على تناسب هندسيّ لا يقع مركزه في نقطة الأصل للمستوي الإحداثي، التحويل الذي يحوِّل النقطة $(x, y)$ إلى النقطة $(2x-4, 2y-3)$. ارسم القطعة المستقيمة التي يتمثَّل طرفاها في $(2, 3)$ وَ $(5, 5)$، وارسم صورتها بالتحويل السابق. حدِّد مركز التناسب الهندسيّ ونسبته. استفد مما قمت به لكتابة إحداثيّ صورة النقطة $(x, y)$ بالتناسب الهندسيّ الذي يحتلّ مركزه النقطة $(1, 2)$ ونسبته 4.

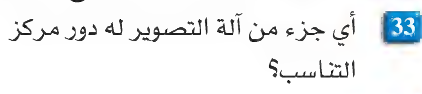



**32** يريد سامي أن يكبِّر الرسم المقابل إلى مربّع ضلعه 12cm بدلاً من 4cm. ما نسبة التناسب الهندسي الذي يسمح بذلك؟ متوازي أضلاع رؤوسه $(0, 0)$؛ $(1, 1)$؛ $(1, 2)$؛ $(0, 1)$. حدِّد إحداثيّي كل من رؤوس صورته بالتكبير السابق، وارسم صورة متوازي الأضلاع. ارسم صورة الرسم بكاملها.

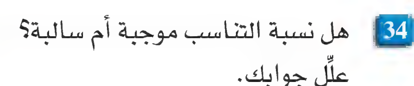


**تطبيـــقات**

**يبيّن الشكل المقابل مخطّطًا يوضح عمل آلة التصوير.**

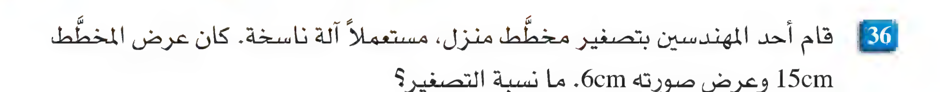


33 أي جزء من آلة التصوير له دور مركز التناسب؟



34 هل نسبة التناسب موجبة أم سالبة؟ علّل جوابك.

35 ما السبب الذي يجعل الصورة مقلوبة؟



36 قام أحد المهندسين بتصغير مخطّط منزل، مستعملاً آلة ناسخة. كان عرض المخطّط 15cm وعرض صورته 6cm. ما نسبة التصغير؟

## نظرة إلى الوراء

37 احسب محيط مثلّث متوازن قاعدته 6cm وضلعه 8cm. احسب مساحته.

38 احسب قطر مثلّث قائم ومتوازن، ضلعه 7cm.

**تطبيـــقات**

39 **جيولوجيا** يبلغ محيط الدائرة العظمى للأرض 40 000km. كم يبلغ شعاع الأرض؟

40 **جيولوجيا** تبلغ سماكة الغلاف الجوّي للأرض 550km. استعمل هذه المعلومة وجواب التمرين 39 لحساب حجم الأرض مع غلافها الجوّي.

## نظرة إلى الأمام

**تطبيـــقات**

**الكرسي المُدَوْلَب** يدرس أحد المهندسين تصميمًا لكرسيٍّ مُدَوْلَب يستعمله المُقعَدون للمشاركة في مباراة لكرة السلّة. قرَّر أن يكون قطر الدولاب 56cm.

41 كم يتقدَّم الكرسيّ المُدَوْلَب عندما يدور الدولاب $45^{\circ}$ ؟

42 يبلغ طول ملعب كرة السلّة 23.5m. كم دورة يدور الدولاب حتى يجتاز الكرسيّ الملعب من طرف إلى آخر.



الدرس 6

# الدائرة إحداثيًّا

# Circles in the Coordinate Plane



**الأهداف**

- يكتب معادلة الدائرة ويستعملها.
- يعدِّل معادلة الدائرة وفقًا لتغيُّر مركزها.



لماذا

تُنشئ البرامج الهندسية عددًا من الأشكال الهندسية، كالنقطة والمستقيم والدائرة. وتستعمل هذه البرامج معادلات جبرية خاصة بتلك الأشكال.

## رسم الدائرة انطلاقًا من معادلتها Graphing Circle From an Equation

صادفت خلال دراستك للجبر معادلات متنوِّعة مثل $y=2x-3$ (معادلة مستقيم) أو $y=x^2-3$ (معادلة قطع مكافئ). سوف تستكشف في هذا الدرس معادلات يظهر فيها $x$ وَ $y$ في صيغة التربيع.



مثـــــال 1

ارسم بيان المعادلة: $x^2+y^2=25$ بإيجاد عدد من الأزواج المرتَّبة $(x, y)$ تحقِّق هذه المعادلة، ورسم النقاط العائدة إليها. تعرَّف الشكل الهندسي لهذا البيان. يمكنك الاستعانة بحاسبة بيانيَّة للتحقُّق من صحَّة رسمك.



الحـــل



الجبر

لدى محاولتك رسم بيان نوع جديد من المعادلات، حاول أوَّلاً أن تحدِّد تقاطعه مع محورَي الإحداثيّات. لتحديد تقاطع البيان مع المحور الأول، عوِّض عن المتغيِّر $y$ بالصفر (عندما يقطع البيان المحور الأول يكون $y=0$) ثم حُلّ المعادلة التي تحصل عليها.

$x^2+0^2=25$ أو $x^2=25$ أو $x=\pm5$.





يقطع البيان المحور الأول عند النقطة $(5, 0)$ والنقطة $(-5, 0)$ .

لتجد تقاطع البيان مع المحور الثاني، حدِّد قيَم المتغيِّر $y$ عندما يكون $x = 0$ .

$0^2 + y^2 = 25$ ، أو $y^2 = 25$ ، أو $y = \pm 5$ .

يقطع البيان المحور الثاني، عند النقطة $(0, 5)$ والنقطة $(0, -5)$ .

بعد ذلك، عوِّض عن المتغيِّر $x$ بقيَم أُخرى مثل 3.

$3^2 + y^2 = 25$ ، أو $y^2 = 16$ ، أو $y = \pm 4$.

يمرّ البيان بنقطتَيْن لهما الإحداثيّان الثانيان $y = 4$ وَ $y = -4$ . إنَّهما النقطتان $(3, 4)$ وَ $(3, -4)$ .

هكذا، تستطيع إنشاء الجدول المقابل بالتعويض عن المتغيِّر $x$ بقيَم مناسبة.

| $x$ | $y$ | النقطة على الرسم |
|---|---|---|
| 3 | $\pm 4$ | $(3, 4)$ وَ $(3, -4)$ |
| $-3$ | $\pm 4$ | $(-3, 4)$ وَ $(-3, -4)$ |
| 4 | $\pm 3$ | $(4, 3)$ وَ $(4, -3)$ |
| $-4$ | $\pm 3$ | $(-4, 3)$ وَ $(-4, -3)$ |

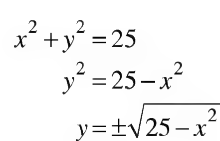
ارسم هذه النقاط بالإضافة إلى نقاط التقاطع مع المحورَين. الرسم الذي تحصل عليه هو الدائرة التي يحتلّ مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5. ارسم هذه الدائرة.

**تفكير ناقد** كيف يتغيَّر البيان إذا استعملت عوضًا عن 25 الأعداد 49 وَ 81 وَ 51 على التوالي.

## استعمال الحاسبة البيانيَّة Using Graphing Technology




يمكنك استعمال حاسبة بيانيَّة لرسم البيان. تتطلب الحاسبة البيانية إدخال معادلة الخط المطلوب على صورة $y = \ldots$ عليك أوَّلاً أن تحلّ المعادلة لتحسب المتغيِّر $y$ بدلالة $x$.




$$x^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 25 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

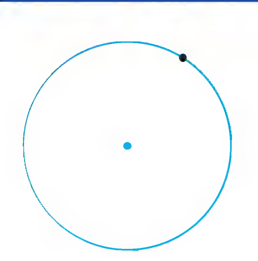


وهكذا، عليك أن ترسم بيان المعادلة $y = \sqrt{25 - x^2}$ وبيان المعادلة $y = -\sqrt{25 - x^2}$ .

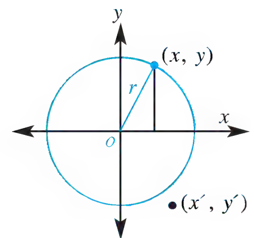
## بناء معادلة الدائرة Deriving the Equation of a Circle




**الدائرة** هي مجموعة النقاط التي تقع على مسافة واحدة $r$ **(نصف قطر الدائرة)** من نقطة معيَّنة **(مركز الدائرة)**. ابدأ بأبسط الحالات حيث يقع مركز الدائرة في نقطة الأصل.



اختر نقطة $(x, y)$ على الدائرة لا تقع على أيٍّ من المحورَين. ارسم مثلَّثًا قائمًا انطلاقًا من هذه النقطة، كما هو مبيَّن في الشكل المقابل. طولا ضلعَي الزاوية القائمة هما $|x|$ وَ $|y|$، وطول الوتر هو المسافة $r$ الممتدّة بين النقطة المختارة على الدائرة ونقطة الأصل.




هكذا ترى أن إحداثيَّي النقطة المختارة على الدائرة يحقّقان المعادلة:

$x^2 + y^2 = r^2$ . المعادلة 1

يمكنك أن تتحقَّق من أن إحداثيات نقاط تقاطع الدائرة مع المحورَين تحقِّق هذه المعادلة أيضًا. بالمقابل، إذا كانت $(x´, y´)$ نقطة لا تقع على الدائرة، فإن المسافة بينها وبين نقطة الأصل لا تساوي $r$. ينتج من ذلك أن إحداثيَّي هذه النقطة لا يحقِّقان المعادلة السابقة. إذًا،

$$(x´)^2 + (y´)^2 \neq r^2$$

**تفكير ناقد** لماذا $(x´)^2 + (y´)^2 \neq r^2$ عندما لا تقع النقطة $(x´, y´)$ على الدائرة؟

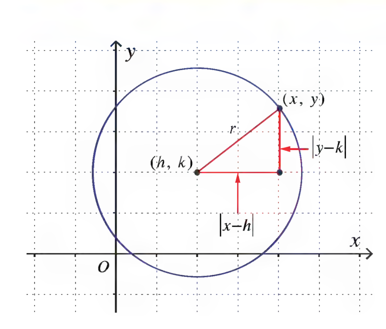
لاحظ أن المعادلة 1 تتمتَّع بالخاصيَّتَين التاليتَين:

- إحداثيّا كل نقطة تقع على الدائرة يحقِّقان هذه المعادلة.
- إحداثيّا كل نقطة لا تقع على الدائرة لا يحقِّقان هذه المعادلة.

يثبت مما سبق أن المعادلة $x^2 + y^2 = r^2$ هي معادلة دائرة نصف قطرها $r$ ومركزها نقطة الأصل.

## تحريك مركز الدائرة Moving the Center of the Circle

لكي تجد الصورة العامّة لمعادلة الدائرة التي لا يقع مركزها في نقطة الأصل، أمعن النظر في الشكل المقابل.




يحقِّق إحداثيّا كل نقطة، تقع على الدائرة، المعادلة:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ . المعادلة 2

من الواضح أن إحداثيي أي نقطة، لا تقع على الدائرة، لا يحقِّقان هذه المعادلة. تستنتج من ذلك أن المعادلة 2 هي معادلة الدائرة.

**تفكير ناقد** كيف تبيِّن أن العلاقات في الشكل السابق تبقى نفسها لو كانت النقطة $(h, k)$ تقع في الربع الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع؟

**مثــــال**

**2** حدِّد مركز الدائرة التي معادلتها $(x-7)^2+(y+3)^2=36$ ثم حدِّد نصف قطرها.

**الحــل**

إذا قارنت المعادلة المُعطاة مع الصورة العامّة لمعادلة الدائرة، ستجد أوجه الشبه التالية:

| في المعادلة المُعطاة | في الصورة العامة لمعادلة الدائرة |
|---|---|
| $(x-7)^2$ | $(x-h)^2$ |
| $(y+3)^2=((y-(-3))^2$ | $(y-k)^2$ |
| 36 | $r^2$ |

هذه المقارنة تسمح لك باستخلاص ما يلي: $h=7$، $k=-3$، $r=6$ .

إذًا، مركز الدائرة هو النقطة $(7, -3)$ ، ونصف قطرها يساوي 6 وحدات طول.

**حــاولْ** حدِّد نصف قطر الدائرة ومركزها في كل حالة. ارسم كل دائرة باستعمال الحاسبة البيانية، وقارن الرسم مع ما وجدت.

أ $(x+3)^2+(y-3)^2=49$

ب $(x-3)^2+(y+3)^2=49$

ج $(x-4)^2+(y-5)^2=30$

د $(x+2)^2+(y-5)^2=50$

# التمـــاريـــن

## التواصل في الرياضيات

1 كيف تحدِّد نقاط تقاطع الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2=4$ مع كلٍّ من المحورَين.

2 كيف تحدِّد نقاط تقاطع الدائرة التي معادلتها $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ مع كلٍّ من المحورَين.

3 هل من دائرة لا تتقاطع مع أيٍّ من المحورَين؟ كيف يبدو الرسم في هذه الحالة؟

4 استعمل قانون المسافة بين نقطتَين لكتابة المسافة بين النقطتَين $(h, k)$ وَ $(x, y)$ . ما الذي يربط بين هذا المقدار والصورة العامة لمعادلة الدائرة؟

5 **تكنولوجيا** غالبًا ما يقتصر عمل الحاسبة البيانيَّة على رسم المعادلات المعطاة على الصورة: $y=\dots$ . كيف تحلّ الصورة العامة لمعادلة الدائرة بالنسبة إلى المتغيِّر $x$؟



## تمارين موجَّهة

**استعمل المعادلة $x^2+y^2=100$ في التمارين من 6 إلى 8.**

6 حدِّد نقاط تقاطع الدائرة مع كلّ من محورَي الإحداثيّات.

7 أكمل الجدول المقابل.

| $x$ | $y$ | نقطة على الدائرة |
|---|---|---|
| 0 | ? | ? |
| ? | 0 | ? |
| 6 | ? | ? |
| −6 | ? | ? |
| 8 | ? | ? |
| −8 | ? | ? |

8 ضع، في المستوي الإحداثي، النقاط الواردة في الجدول السابق، ثم ارسم الدائرة.

**استعمل المعادلة $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ لحل التمارين من 9 إلى 11.**

9 حدِّد مركز الدائرة.

10 حدِّد نقاط تقاطع الدائرة مع كلّ من محورَي الإحداثيّات.

11 أكمل الجدول.

| $x$ | $y$ | نقطة على الدائرة |
|---|---|---|
| 0 | ? | ? |
| ? | 0 | ? |
| 1 | ? | ? |
| −1 | ? | ? |
| 4 | ? | ? |
| 7 | ? | ? |
| 8 | ? | ? |
| 9 | ? | ? |

12 ضع، في المستوي الإحداثي، النقاط الواردة في الجدول السابق، ثم ارسم الدائرة.

## تمارين وتطبيقات




**حدِّد نقاط تقاطع الدائرة مع كل من محورَي الإحداثيّات.**

13 $x^2+y^2=64$

14 $x^2+y^2=50$

15 $x^2+(y-4)^2=25$

16 $(x-2)^2+y^2=9$

17 $(x-6)^2+(y-8)^2=100$

اكتب معادلة الدائرة بمعرفة مركزها ونصف قطرها .

| | المركز | نصف القطر |
|---|---|---|
| 18 | (0, 0) | 6 |
| 20 | (0, 0) | $\sqrt{13}$ |
| 22 | (0, 6) | 5 |
| 24 | (1, −7) | 10 |

| | المركز | نصف القطر |
|---|---|---|
| 19 | (0, 0) | 2.5 |
| 21 | (2, 3) | 4 |
| 23 | (4, −5) | 7 |
| 25 | (4, −3) | $\sqrt{7}$ |

**الجبر** حدّد مركز الدائرة ونصف قطرها.

26 $x^2+y^2=100$

27 $x^2+y^2=36$

28 $x^2+y^2=101$

29 $(x-6)^2+y^2=9$

30 $x^2+(y-3)=4$

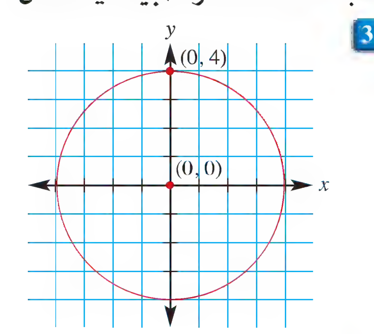
31 $(x+5)^2+(y-2)^2=16$

32 $x^2+(y+3)=49$

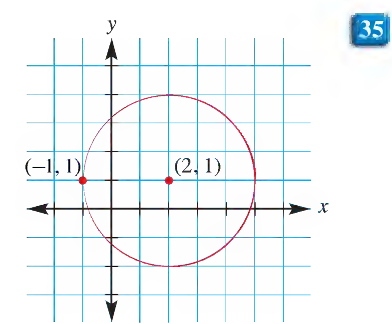
33 $(x+1)^2+(y+3)^2=19$

اكتب معادلة الدائرة المبيَّنة في الشكل.

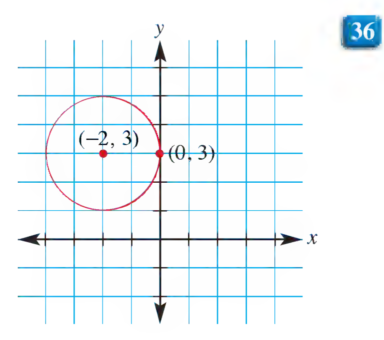
34




35




36




**الجبر** ارسم دائرة على ورقة مربَّعات انطلاقًا من نقاط تقاطعها مع محورَي الإحداثيات، واكتب معادلة لها. قد تتعدَّد الإجابات في بعض التمارين.

| | التقاطع مع المحور الأول | التقاطع مع المحور الثاني |
|---|---|---|
| 37 | 3 وَ −3 | 3 وَ −3 |
| 38 | 2 وَ 6 | لا تقاطع |
| 39 | صفر | 0 وَ 8 |
| 40 | لا تقاطع | 5 |
| 41 | لا تقاطع | لا تقاطع |



الجبر

**اكتب معادلة للدائرة وفقًا للمعلومات المُعطاة عنها.**
**قد يكون من المفيد إنشاء رسم.**

42 المركز: $(2, 3)$؛ المحور الأول مماسّ لها.

43 المركز: $(2, 3)$؛ المحور الثاني مماسّ لها.

44 المركز: $(0, 1)$؛ تمر بالنقطة $(4, 4)$.

45 المركز: $(2, 3)$؛ تمر بالنقطة $(8, 3)$.

46 المركز: $(2, 3)$؛ تمر بالنقطة $(8, 11)$.

47 تشكّل النقطتان $(1, 3)$ و $(5, 3)$ طرفَي أحد أقطار الدائرة.

**استعمل حاسبة بيانيَّة أو أوراقًا بيانية لحل المسائل من 48 إلى 54.**

48 مثِّل بيانيًّا المعادلة $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ . ارسم صورة ما حصلت عليه بالانعكاس حول المحور الأول. اكتب معادلة لهذه الصورة.

49 مثِّل بيانيًّا المعادلة $(x-4)^2+(y-2)^2=1$ . ارسم صورة ما حصلت عليه بالانعكاس حول المحور الثاني. اكتب معادلة لهذه الصورة.

50 مثِّل بيانيًّا المعادلة $(x-2)^2+y^2=9$ . ارسم صورة ما حصلت عليه بالسحب 6 وحدات إلى اليمين. اكتب معادلة لهذه الصورة.

51 مثِّل بيانيًّا المعادلة $(x-6)^2+(y-4)^2=9$ . ارسم صورة ما حصلت عليه بالسحب وحدتَين إلى اليمين، ثم وحدة إلى الأسفل. اكتب معادلة لهذه الصورة.

52 مثِّل بيانيًّا المعادلة $(x-5)^2+(y-4)^2=9$ . ارسم صورة ما حصلت عليه بدوران زاويته $180°$، حول نقطة الأصل. اكتب معادلة لهذه الصورة.

53 أوجد معادلة المماسّ للدائرة $x^2+y^2=100$ عند النقطة $A(-6, 8)$ .

تحـــدٍّ

54 ارسم مثلّثًا رؤوسه $(0, 0)$، $(0, 6)$، $(8, 0)$، ثم اكتب معادلة الدائرة المحيطة به.

## نظرة إلى الوراء

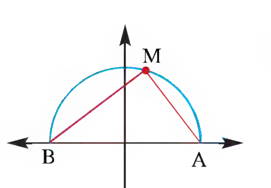
55 رمى باوان سهمًا أصاب رسم الدائرة $x^2+y^2=100$. ما احتمال أن يكون السهم قد وقع داخل الدائرة $x^2+y^2=25$ ؟



56 **فلك** استعمل آرام صفيحة فيها ثقب صغير، يمكن تمثيله بنقطة، تمرّ من خلاله أشعة الشمس لرؤية كسوف الشمس. وضع شاشة بيضاء على بعد 50cm من الثقب، وحصل على صورة للشمس قطرها $x$ mm . كم سيكون قطر صورة الشمس لو وضع آرام الشاشة على بعد 100cm؟ 25cm؟ 45cm؟

## نظرة إلى الأمام

**سوف تبرهن، عبر حلّ التمارين من 57 إلى 59، أن الزاوية المحيطيّة في نصف دائرة هي زاوية قائمة. استعمل الشكل المقابل.**




**57** استعمل معادلة الدائرة التي يحتلّ مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $r$، لتبيّن أن إحداثيي نقطة M من نقاطها هما $\left(a, \sqrt{r^2 - a^2}\right)$.

**58** احسب مَيل كل من المستقيمَين $\overleftrightarrow{MA}$ وَ $\overleftrightarrow{MB}$

**59** برهن أن الزاوية المحيطيَّة $\widehat{AMB}$ قائمة. (تذكَّر: إذا تعامد مستقيمان كان ناتج ضرب مَيلَيهما يساوي ___؟___).







يحثّك هذا المشروع على التوصُّل إلى قانون يسمح بحساب مساحة مضلَّع مرسوم على ورقة منقَّطة، مع الافتراض أن جميع رؤوس المضلَّع تقع على نقاط من نقاط الورقة. سوف يدهشك وجود قانون وحيد يصلح لجميع هذه المضلّعات. سوف تنجز العمل بالاشتراك مع زملائك في فريق العمل. ربما كان من المفيد لكم توزيع العمل فيما بينكم.

## النشاط 1

**احسب مساحة كل من المضلّعات أدناه. قم بعد ذلك بنسخ الجدول وإكماله. يرمز $N_b$ إلى عدد النقاط الواقعة على محيط المضلَّع، ويرمز $N_i$ إلى عدد النقاط داخل المضلَّع، بينما يرمز $A$ إلى مساحة المضلَّع.**

**المجموعة الأولى**

أ ب جـ د هـ و

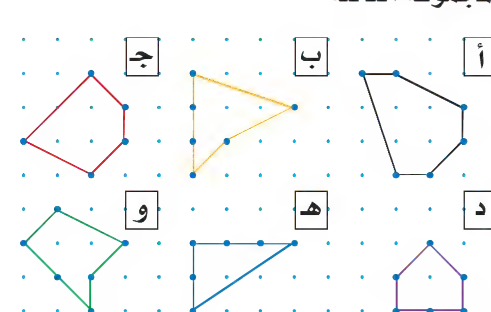
| | $N_b$ | $N_i$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| (أ) | 7 | 4 | 6.5 |
| (ب) | | | |
| (جـ) | | | |
| (د) | | | |
| (هـ) | | | |
| (و) | | | |

**المجموعة الثانية**

أ ب جـ د هـ و

| | $N_b$ | $N_i$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| (أ) | | | |
| (ب) | | | |
| (جـ) | | | |
| (د) | | | |
| (هـ) | | | |
| (و) | | | |

**المجموعة الثالثة**




| المجموعة الثالثة | | | |
|---|---|---|---|
| | $N_b$ | $N_i$ | $A$ |
| (أ) | | | |
| (ب) | | | |
| (جـ) | | | |
| (د) | | | |
| (هـ) | | | |
| (و) | | | |

## النشاط 2

**لإيجاد القانون، تحقَّق من أن عدد النقاط الواقعة على محيط جميع المضلَّعات هو نفسه.**

1 ما النمط الذي يساعدك على حساب المساحة؟

2 اكتب النمط، الذي وجدته، على صورة قانون.

3 تحقَّق من القانون الذي كتبته، عن طريق رسم عدد من المضلَّعات على ورقة التنقيط، وحساب مساحاتها.

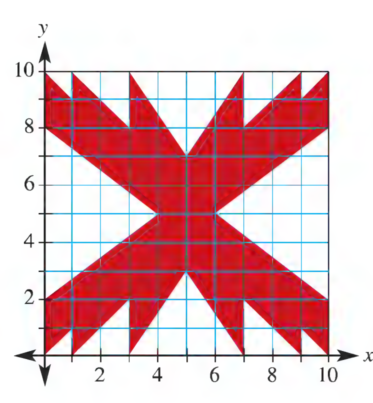
لست أوَّل من وجد هذا القانون. فقد سبقك إليه العالم جورج بيك سنة 1899م.

## النشاط 3

**استعمل الصورة المقابلة.**

1 إذا اخترت، بشكل عشوائي، نقطة على شبكة المربَّعات، فما احتمال أن تكون هذه النقطة من نقاط الجزء الملوَّن؟

2 استعمل مولِّد الأعداد العشوائيَّة في الحاسبة، لإنشاء لائحة مكوَّنة من 20 زوجًا مرتَّبًا، يتكوَّن كل منها من عددَين عشوائيَّين بين 0 وَ 10. انسخ شبكة المربَّعات، ومثِّل الأزواج المرتَّبة على هذه الشبكة. عُدّ النقاط التي وقعت في الجزء الملوَّن، واقسم هذا العدد على 20. هل ناتج القسمة بعيد عن الاحتمال الذي حسبته في السؤال السابق، أم قريب منه؟





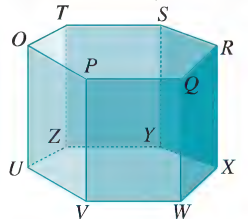




**املأ الفراغ بالعبارة المناسبة.**

1. يتكوَّن تقاطع مستقيمَين من ___؟___ واحدة.
2. يتكوَّن تقاطع مستويَين من ___؟___ واحد.
3. يمرّ ___؟___ واحد فقط بنقطتَين مختلفتَين.
4. يمرّ ___؟___ واحد فقط بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.
5. إذا انتمت نقطتان مختلفتان إلى مستوٍ، فإن المستقيم المار بهاتَين النقطتَين ___؟___ .

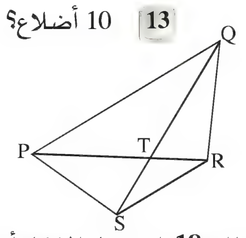
**استعمل المنشور القائم لحل التمارين من 6 إلى 9.**




6. سَمِّ وجهَين متوازيَين.
7. سَمِّ وجهَين متعامدَين.
8. سَمِّ ضلعَين متخالفَين.
9. سَمِّ ضلعًا ووجهًا متعامدَين.
10. أنشئ رسمًا منظوريًّا لمنشور قائم قاعدته مستطيلة، بحيث تكون نقطة التلاشي إلى يمين المنشور.
11. أنشئ رسمًا منظوريًّا لمنشور قائم قاعدته مستطيلة، بحيث تكون نقطة التلاشي أمام المنشور.

**ما اسم مضلَّع له:**

12. 8 أضلاع؟
13. 10 أضلاع؟
14. 12 ضلعًا؟




**لحل التمارين من 15 إلى 18، استعمل الشكل أعلاه، حيث $m\widehat{PRQ}=90^\circ$ و $m\widehat{PTQ}=125^\circ$ و $m\widehat{PQR}=57^\circ$ و $m\widehat{PSQ}=83^\circ$ و $m\widehat{RSQ}=30^\circ$ ، حدِّد قياسات زوايا كل مثلَّث.**

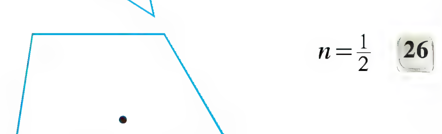
15. المثلَّث $RST$
16. المثلَّث $PST$
17. المثلَّث $PQR$
18. المثلَّث $PQT$
19. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع ثُمانيّ؟
20. ما قياس زاوية مركزيَّة في ثُمانيّ مُنتظم؟
21. ما قياس زاوية داخليَّة في ثُمانيّ مُنتظم؟
22. ما قياس زاوية خارجيَّة في ثُمانيّ مُنتظم؟

**حدِّد صورة القطعة المستقيمة التي تمثِّل طرفَيْها النقطتان $(-2, 1)$ وَ $(3, 4)$ بتناسب هندسيّ مركزه نقطة الأصل، ونسبته:**

23. $3$
24. $-1$

**انسخ الشكل، وارسم صورته بالتناسب الهندسي الذي يحتلّ مركزه النقطة المعينة، ونسبته $n$.**

25. $n=3$



26. $n=\frac{1}{2}$

**ارسم الدائرة في المستوي الإحداثيّ.**

27. $x^2+y^2=49$
28. $(x-1)^2+(y+2)^2=25$
29. ما مركز الدائرة $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ ؟

**اكتب معادلة دائرة مركزها $M$ ونصف قطرها $r$.**

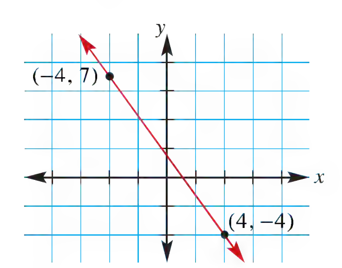
30. $M(0,0)$ ؛ $r=1$
31. $M(6,-2)$ ؛ $r=8$

# 7 اختبار الفصل

**1** أي زوج من نقطتين يحدِّد مستقيمًا متعامدًا مع المستقيم المبيَّن في الشكل؟

أ $(0, 7)$ وَ $(8, -4)$ ب $(4, -7)$ وَ $(-4, 4)$

ج $(-7, 0)$ وَ $(4, 8)$ د $(7, -4)$ وَ $(-4, 4)$




**2** أيٌّ من القياسات أدناه لا تحدِّد مثلَّثًا؟

أ $m\hat{A}=50^\circ$ ؛ $m\hat{B}=85^\circ$ ؛ $m\hat{C}=45^\circ$

ب $AB=12$ ؛ $BC=7$ ؛ $CA=9$

ج $m\hat{A}=90^\circ$ ؛ $m\hat{B}=65^\circ$ ؛ $m\hat{C}=15^\circ$

د $AB=18$ ؛ $BC=6$ ؛ $CA=10$

**3** أيُّ قياس هو قياس زاوية داخليَّة لمضلَّع تُساعيّ مُنتظم؟

أ $40^\circ$ ب $100^\circ$

ج $140^\circ$ د $160^\circ$

**4** رسمت روزان مستقيمَين مَيل الأول $-5$ ، ومَيل الثاني $0.2$. ما صفة هذين المستقيمين؟

أ متوازيان ب متعامدان

ج أفقيّان د غير ذلك

**5** التحويل الهندسي الذي يحوِّل النقطة $(x, y)$ إلى النقطة $(-x, -y)$ هو:

أ سحب ب انعكاس محوَري

ج دوران د تناسب هندسيّ

**6** برهن أن رُباعيًّا رؤوسه $A(3, -1)$ وَ $B(9, -5)$ وَ $C=(7, -8)$ وَ $D=(1, -4)$ ، مستطيل.

**رؤوس مثلَّث هي $(4, 1)$ وَ $(2, 2)$ وَ $(3, 0)$. حدِّد إحداثيّات رؤوس صورته بالتحويل المحدَّد.**

**7** انعكاس حول المحور الأول.

**8** سحب 3 وحدات إلى اليسار، ووحدة إلى أسفل.

**أكمل.**

**9** يتكوَّن تقاطع مستقيمَين من ___؟___ .

**10** يتكوَّن تقاطع مستويَين من ___؟___ .

**11** إذا انتمت نقطتان مختلفتان إلى مستوٍ، فإن المستقيم المار بهما ___؟___ .

**استعمل المثلَّث $ABC$ حيث $A(-1, 8)$ وَ $B(4, 3)$ وَ $C(1, 2)$ لحل التمارين من 12 إلى 15.**

**12** احسب مَيل كل ضلع من أضلاعه.

**13** برهن أن المثلَّث قائم.

**14** احسب إحداثيّات منتصفات أضلاعه.

**15** احسب أطوال أضلاعه مقرِّبًا كل جواب إلى أقرب جزء من مئة.

**16** مساحة المضلَّع المنتظم المقابل؟

8cm

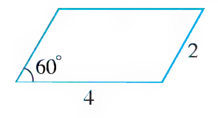
**17** ما إحداثيّا صورة النقطة $(3, 3)$ بدوران مركزه نقطة الأصل وزاويته $45^\circ$؟

**18** اختار آوات بشكل عشوائيّ نقطة على القطعة المستقيمة أدناه. ما احتمال أن تكون هذه النقطة بين 2 وَ 2.5؟

2 3 4 5 6 7 8

**19** ما قياس زاوية مركزيَّة في مضلَّع مُنتظم له 13 ضلعًا؟

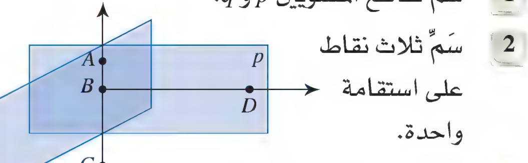
**20** ما مساحة متوازي الأضلاع هذا؟



7

# اختبار تراكمي

**استعمل الشكل التالي لحل التمارين من 1 إلى 9.**




1 سَمِّ تقاطع المستويَين $p$ و $q$.

2 سَمِّ ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

3 سَمِّ ثلاث نقاط على استواء واحد، وليست على استقامة واحدة.

4 سَمِّ ثلاث قطع مستقيمة.

5 سَمِّ شعاع.

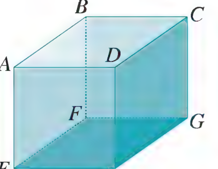
6 سَمِّ زاويتَين متكاملتَين.

7 سَمِّ مستقيمًا يقع في المستوى $p$.

8 سَمِّ مستقيمًا لا يقع في المستوى $q$.

9 سَمِّ المستوى $p$ بطريقة أخرى.

**استعمل الشكل التالي لحل التمارين من 10 إلى 17.**




10 سَمِّ زوجَين من الوجوه المتوازية.

11 سَمِّ ضلعَين متخالفَين.

12 سَمِّ ضلعًا ووجهًا، بحيث يكون الضلع متعامدًا مع الوجه.

13 سَمِّ ضلعًا ووجهًا، بحيث يكون الضلع موازيًا للوجه.

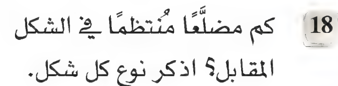
14 سَمِّ زاوية ذات وجهَين، وحدِّد قياسها.

15 أنشئ رسمًا منظوريًّا لمكعَّب بنقطة تلاش واحدة علمًا بأن نقطة التلاشي تقع وراء المكعب.

16 أنشئ رسمًا منظوريًّا بنقطتَي تلاشٍ لمكعَّب، علمًا بأن الأفق يقع وراء المكعَّب.

17 أنشئ رسمًا منظوريًّا بنقطتَي تلاشٍ لمكعَّب، علمًا بأن الأفق يقع أمام المكعَّب.

**استعمل الشكل المقابل، لحل التمارين من 18 إلى 21.**



18 كم مضلَّعًا مُنتظمًا في الشكل المقابل؟ اذكر نوع كل شكل.

19 حدِّد لكل مضلَّع مُنتظم، وجدته في التمرين السابق، قياسات زاويته الداخليَّة وزاويته الخارجيَّة وزاويته المركزيَّة.

20 احسب عامد كلّ ثماني وجدته.

21 احسب مساحة كل مضلَّع مُنتظم وجدته في التمرين 18.

22 **تصميم** قام نجّار بتكبير طاولة مربَّعة بإضافة قطعة خشب مستطيلة إلى سطحها. هل الطاولة الجديدة مُنتظمة؟ متطابقة الأضلاع؟ متطابقة الزوايا؟

| القطعة المضافة | سطح الطاولة |
|---|---|

**حدِّد صورة القطعة المستقيمة التي يحتلّ طرفاها النقطتَين $(6, -1)$ وَ $(-4, 2)$ بكلّ من التناسبَين الهندسيَّين.**

23 تناسب هندسيّ مركزه نقطة الأصل ونسبته $-2$ .

24 تناسب هندسيّ مركزه نقطة الأصل، ونسبته 0.5.

25 انقل الشكل المقابل، وأنشئ صورة المثلَّث، بتناسب هندسي مركزه النقطة المعطاة، ونسبته 2.



**ارسم كل دائرة باستعمال معادلتها.**

26 $x^2+y^2=36$

27 $x^2+y^2=64$

28 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

**اكتب معادلة كل دائرة.**

29 دائرة مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 2.

30 دائرة مركزها النقطة $(1, -5)$، ونصف قطرها 4.

## الفصل الثامن

# علم المثلَّثات




# علم المثلَّثات Trigonometry

بين أضلاع المثلَّث وزواياه علاقات مهمّة يدرسها علم قديم حديث هو **علم المثلثات**.

منذ القدم اهتمّ الإنسان بالمثّلثات. وفي هاتين الصفحتين صور تدلّ على ذلك.

لعلم المثلَّثات تطبيقات واسعة في الفيزياء وعلم الفلك والعمارة والهندسة وغيرها.

## الدروس

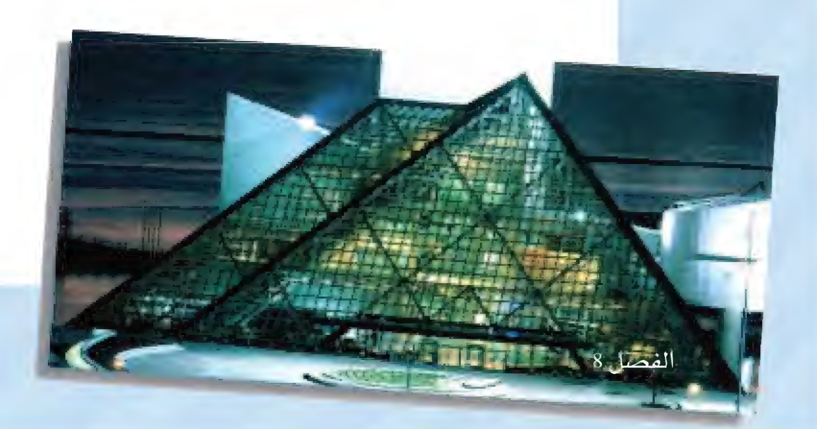




عُرف باسمه. يحمل الدولاب مقصورات صغيرة تتَّسع لبضعة أشخاص، ويدور بها. وهكذا فإنه ينقل الركّاب من الأسفل إلى الأعلى، وبالعكس. خلال عملك على مشروع الفصل، سوف تقوم بتطوير نموذج لدراسة تغيُّر ارتفاع راكب المقصورة بمرور الزمن.

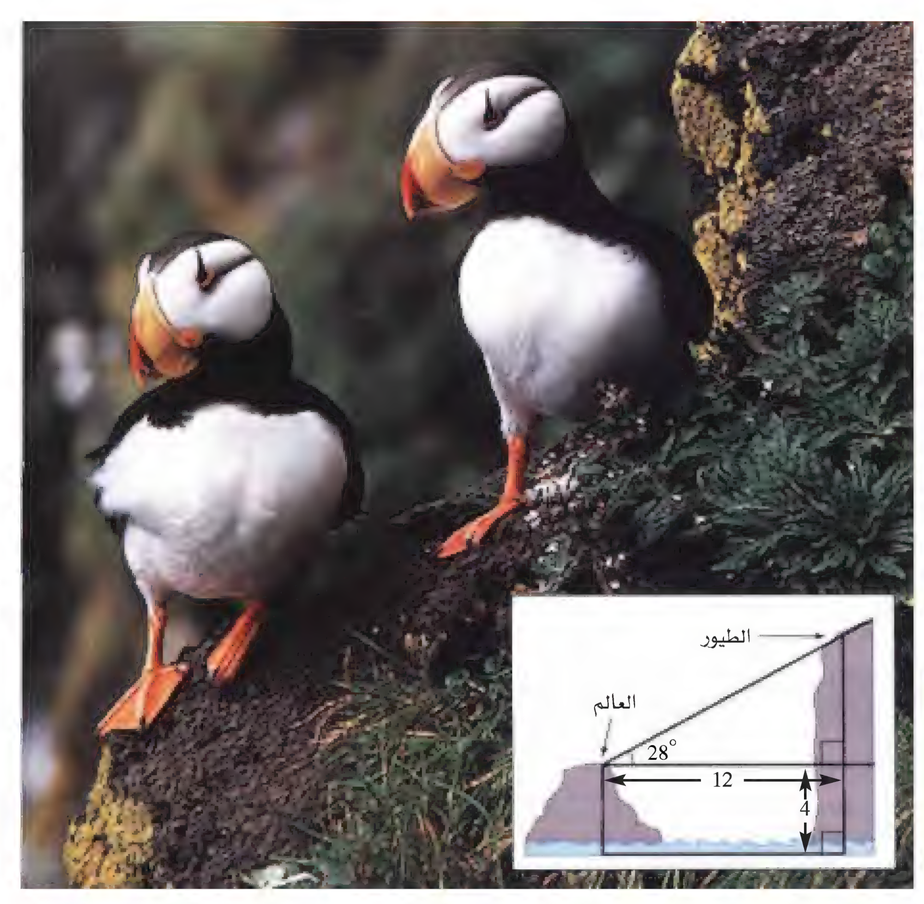
بعد انتهائك من مشروع الفصل، تصبح قادرًا على:

- تفسير ما يدلّ عليه في الواقع كل مُكوِّن من مكوِّنات هذا النموذج.
- تحديد سرعة نقطة تقع على محيط الدولاب.






# حلّ المثلَّث القائم Solving Right Triangle




**الأهداف**

- يميِّز النسب المثلَّثيّة لزاوية حادَّة ويحسبها.
- يحلّ مثلَّثًا قائمًا باستعمال النسب المثلَّثيّة.

**لماذا**

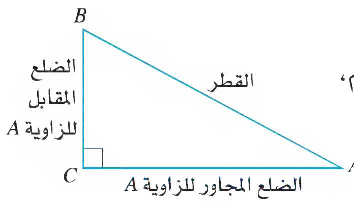
يمكنك استعمال النسب المثلَّثية في المثلث القائم لحلّ مسائل من الواقع كأن تحدِّد في الصورة ارتفاع موقع الطيور عن سطح الماء.

**تطبيقات**

**طيـــور**

يقوم أحد العلماء بتصوير مجموعة من الطيور تقف على منحدر جبلي، لحساب ارتفاع هذه الطيور عن سطح الماء. قاس العالم الزاوية التي يشكِّلها خطّ النظر إلى الطيور مع خطٍّ أفقيّ، فوجد أنها $28^\circ$. كيف يحسب العالم ارتفاع موقع الطيور عن سطح الماء، علمًا بأنه يقف على علوٍّ 4m، وأن المسافة بينه وبين المنحدر 12m؟

لكي تحسب ارتفاع موقع الطيور، استعمل علم المثلَّثات. يمكنك استعمال علم المثلَّثات لإيجاد قياس زاوية، من زوايا مثلَّث قائم، أو طول ضلع من أضلاعه.




تذكَّر أن قطر المثلَّث القائم هو الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة. في المثلَّث الوارد إلى اليسار، تجد أن الضلع $\overline{AB}$ هو القطر، والضلع $\overline{AC}$ هو **الضلع المجاور Adjacent** للزاوية A، والضلع $\overline{BC}$ هو **الضلع المقابل Opposite** لها.

**نقطة مراقبة √**

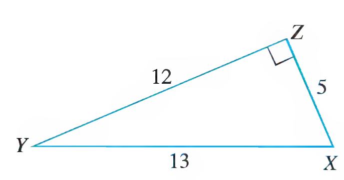
حدِّد الضلع المجاور للزاوية B والضلع المقابل لها.

**النسب المثلَّثيّة للزاوية $\hat{A}$ Trigonometric Ratios $\hat{A}$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **التعريف** | ساين $A = \frac{\text{مقابل}}{\text{قطر}}$ | كوساين $A = \frac{\text{مجاور}}{\text{قطر}}$ | تانجانت $A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ |
| **الرمز** | $\sin A = \frac{BC}{AB}$ | $\cos A = \frac{AC}{AB}$ | $\tan A = \frac{BC}{AC}$ |

**مثـــــال**

**1** **احسب النسب المثلَّثيّة الثلاث للزاوية $X$ في المثلّث المقابل. أعطِ أجوبة مضبوطة، وأجوبة مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.**




**الحــل**

$\sin X = \frac{12}{13} = 0.9231$

$\cos X = \frac{5}{13} = 0.3846$ $\qquad$ $\tan X = \frac{12}{5} = 2.4$

**حـــاولْ** احسب النسب المثلَّثيّة الثلاث للزاوية $Y$ في المثلث أعلاه. أعطِ أجوبة مضبوطة وأجوبة مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

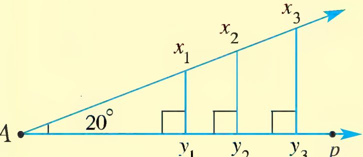
**النشاط**

**استكشاف النسب المثلثية** **Exploring Trigonometric Ratios**

**يلزمك** منقلة ومسطرة سنتيمترية وحاسبة.

أنشئ جدولاً مُشابهًا للجدول أدناه.

**1.** انسخ ما ورد في الجدول، ثم أكمله عن طريق قياس الأضلاع المذكورة، وحساب النسب المثلثية للزاوية $A$.




**2.** هل القيَم التي كتبتها في عمود $\sin A$ متساوية تقريبًا؟ هل الأمر كذلك في عمود $\cos A$؟ في عمود $\tan A$؟

| المثلّث | مقابل $\hat{A}$ | مجاور $\hat{A}$ | قطر | $\sin A = \frac{\text{مقابل}}{\text{قطر}}$ | $\cos A = \frac{\text{مجاور}}{\text{قطر}}$ | $\tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Ax_1y_1$ | | | | | | |
| $Ax_2y_2$ | | | | | | |
| $Ax_3y_3$ | | | | | | |

**3.** قارن النتائج التي توصَّلت إليها مع نتائج زملائك في الصف.

**4.** هل تستطيع صياغة فرضيَّة حول النسب المثلَّثيّة الثلاث للزاوية $A$؟

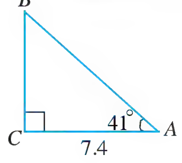



لا تتغيَّر قيَم النسب المثلَّثيّة لزاوية حادّة بتغيُّر المثلَّث القائم الذي استُعمل لحسابها، كما ظهر لك ذلك خلال قيامك بالنشاط أعلاه. تتحدَّد قيَم هذه النسب بقياس الزاوية فقط.

يمكنك الحصول على قيَم النسب المثلَّثيّة لزاوية عُلم قياسها، باستعمال الحاسبة العلميّة. ويمكنك استعمال النسب المثلّثيّة لكي تجد أطوال بعضٍ من أضلاع المثلَّث القائم، كما يبيِّن ذلك المثال 2.

## مثـــال

**2** **احسب أطوال أضلاع المثلَّث المقابل. علمًا بأن $\cos 41 \approx 0.7547$ وَ $\tan 41 \approx 0.8393$ .**







بما أن طول الضلع $AC$ معروف، فينبغي قياس طول كل من $\overline{AB}$ وَ $\overline{BC}$ .

استعمل $\cos A$ لتجد طول القطر $AB$، واستعمل $\tan A$ لتجد طول الضلع $BC$ .

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

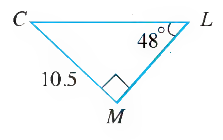
$$\cos 41^\circ = \frac{7.4}{AB} \qquad \tan 41^\circ = \frac{BC}{7.4}$$

$$AB = \frac{7.4}{\cos 41^\circ} \qquad BC = 7.4 \times \tan 41^\circ$$

$$BC \approx 7.4 \times 0.8693$$

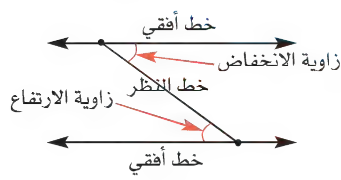
$$AB \approx \frac{7.4}{0.7547} \approx 9.8 \qquad BC \approx 6.4$$

**حـــاولْ** احسب أطوال أضلاع المثلَّث المقابل. علمًا بأن $\cos 48 \approx 0.669$ وَ $\tan 48 \approx 1.11$ .




**زاوية الارتفاع Angle of Elevation** هي الزاوية التي يُكوِّنها خطّ أفقيّ مع خطّ النظر إلى نقطة أعلى منه.

**زاوية الانخفاض Angle of Depression** هي الزاوية التي يُكوِّنها خطّ أفقيّ مع خطّ النظر إلى نقطة أدنى منه.




## مثـــال

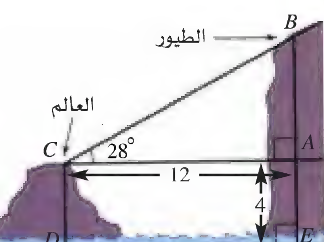
**3** **بالعودة إلى المسألة المطروحة في أول الدرس، احسب ارتفاع موقع الطيور عن سطح الماء. علمًا بأن $\tan 28^\circ \approx 0.5317$.**




**طيـــور**

الحـل

يمثِّل طول القطعة المستقيمة $BE$ ارتفاع موقع الطيور عن سطح الماء. بما أن $BE = BA + AE$ ،
وبما أن $AE = CD$ ، فإنّ عليك أن تحسب طول $AB$ .




$$\tan 28^\circ = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12 \times \tan 28^\circ$$

$$AB \approx 6.3$$

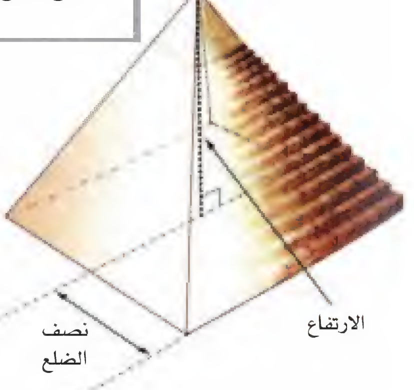
وبالتالي $BE = BA + AE = 6.38 + 4 = 10.38$ .

يرتفع موقع الطيور 10.38م عن سطح الماء.

**نافذة على الثقافة الفرعونية** استعمل الفراعنة علاقة مثلَّثيّة أسموها سيكد للدلالة على ميَل وجه الهرم.

$$\text{سيكد} \ \text{cotangent} = \frac{\text{ضعف قياس ضلع قاعدة الهرم}}{\text{7أضعاف ارتفاع الهرم}}$$

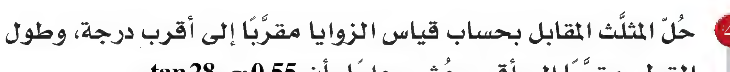
لاحظ أن السيكد يماثل مقلوب تان الزاوية. وهو ما يُسمّى كوتان الزاوية.



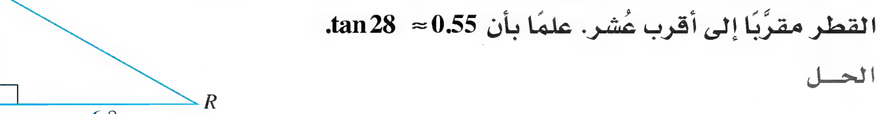



أن **تحلّ مثلّثًا قائمًا Solve a Right Triangle** يعني أن تحسب قياسات زوايا المثلّث وأطوال أضلاعه المجهولة. تستعمل في عملك هذا الحاسبة العلمية، لتجد قياس زاوية عُرفت إحدى نسبها المثلّثيّة. وتستعمل أيضًا حقيقة أن مجموع زوايا المثلّث هو $180°$ ، أي إن مجموع الزاويتَيْن الحادّتَيْن في مثلّث قائم هو $90°$ .

## مثال 4



**حُلّ المثلّث المقابل بحساب قياس الزوايا مقرّبًا إلى أقرب درجة، وطول القطر مقرّبًا إلى أقرب عُشر. علمًا بأن $\tan 28 \approx 0.55$.**




**الحل**

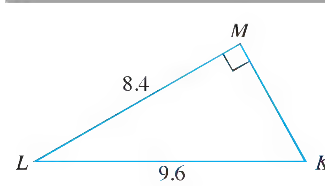
1. $\tan R = \frac{3.8}{6.8}$

$R = \tan^{-1}\frac{3.8}{6.8} \approx 29°$

2. بما أن مجموع الزاويتَيْن الحادّتَيْن $90°$ ، فإن قياس الزاوية $S$ هو $90° - 29° = 61°$ تقريبًا .
3. استعمل نظرية فيثاغورس لحساب طول القطر.

$$(RS)^2 = (6.8)^2 + (3.8)^2$$
$$RS = \sqrt{(6.8)^2 + (3.8)^2}$$
$$RS \approx 7.8$$

**حاولْ** حُلّ المثلّث المقابل بحساب قياس الزوايا مقرَّبًا إلى أقرب درجة، وطول الضلع مقرَّبًا إلى أقرب عُشر. علمًا بأن $\tan 29° \approx 0.875$ .




**تفكير ناقد**

1. كيف تحلّ المثلّث، في المثال 4 بادئًا بحساب طول القطر، ثم استعمال ساين أو كوساين لإيجاد قياس زواياه؟
2. بعد حسابك قياس $\hat{R}$، هل بإمكانك حساب طول القطر دون استعمال نظرية فيثاغورس؟

# التمارين



## التواصل في الرياضيات



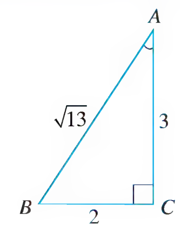
1. كيف تحسب النسب للزاوية $A$ في المثلّث المقابل.



2. كيف تجد قياسَي الزاويتَيْن $A$ وَ $B$ في المثلّث المقابل.



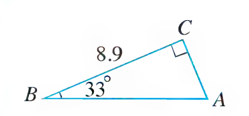
3. ما الفرق بين $\sin^{-1} A$ وَ $\frac{1}{\sin A}$ ؟

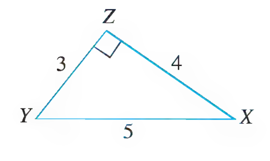





## تمارين موجّهة

4. احسب النسب المثلّثيّة للزاوية $X$ في المثلّث الأيسر. أعط الإجابات مضبوطة، ومقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.
5. احسب طولَي الضلعَيْن $AC$ وَ $BA$ في المثلّث الأيمن.

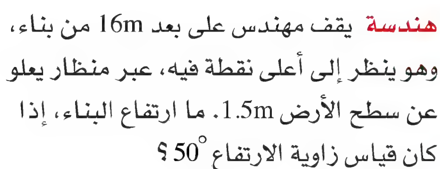


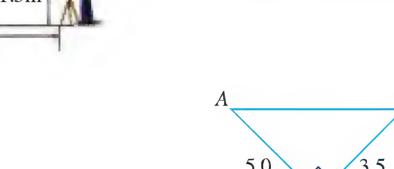



## تطبيـــقات

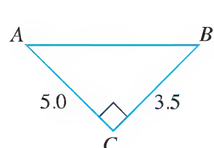


**6** **هندسة** يقف مهندس على بعد 16m من بناء، وهو ينظر إلى أعلى نقطة فيه، عبر منظار يعلو عن سطح الأرض 1.5m. ما ارتفاع البناء، إذا كان قياس زاوية الارتفاع $50^\circ$ ؟



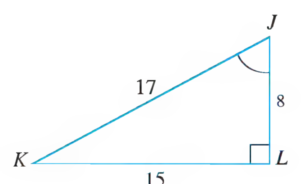



**7** حُلَّ المثلَّث أدناه. احسبْ قياس الزاوية $A$ مقرَّبًا إلى أقرب درجة، وطول الضلع $AB$ مقرَّبًا إلى أقرب عُشر.




## تمارين وتطبيقات

**استعمل المثلَّث $JKL$ لحساب كل قيمة مطلوبة. ليكنِ الجواب مضبوطًا، ثم مقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.**




**8** $\sin K$ **9** $\sin J$

**10** $\cos J$ **11** $\cos K$

**12** $\tan K$ **13** $\tan J$

**استعمل المثلّث $FGH$ لحساب كل قيمة مطلوبة. ليكنِ الجواب مضبوطًا، ثم مقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.**

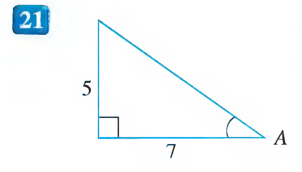
**14** $\sin G$ **15** $\sin F$

**16** $\cos G$ **17** $\cos F$

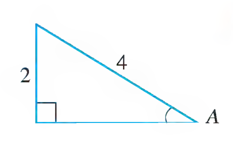
**18** $\tan G$ **19** $\tan F$

**احسب قياس الزاوية $A$ باستعمال الحاسبة.**

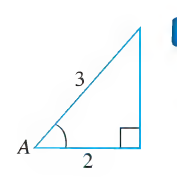
**20**



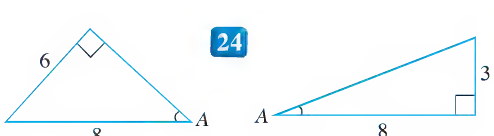

**21**



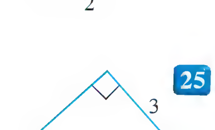

**22**




**23** **24**

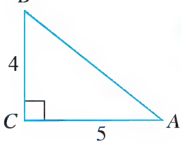



**25**

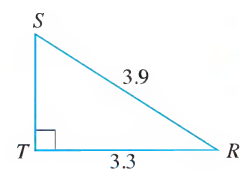


**حُلَّ المثلّث. احسبْ قياس الزوايا مقرَّبًا إلى أقرب درجة، وطول الأضلاع مقرَّبًا إلى أقرب عشر.**

**26**

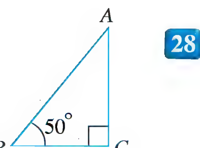



**27**

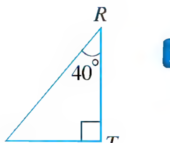




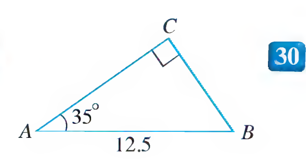

**28**



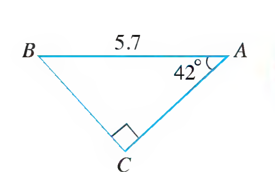

**29**




**30**



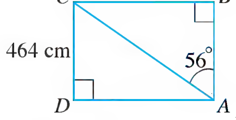

**31**




**32** برهن أن العلاقة $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ ، صحيحة دائمًا. عندما $\cos \hat{A} \neq 0$



**33** **هندسة** احسب طول كل من الضلع $AD$ والقطر $AC$ في المستطيل المقابل.

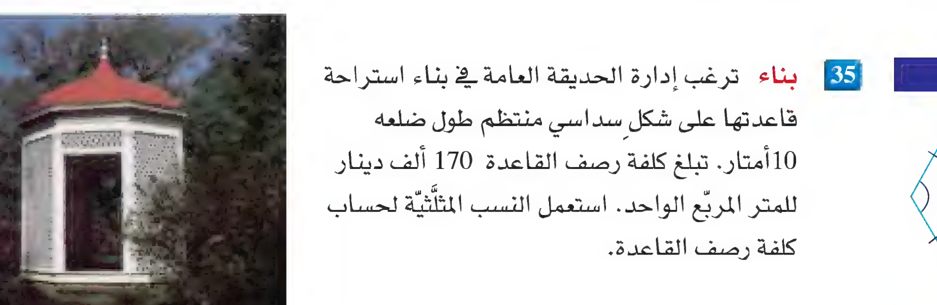



**تطبيقات**

**34** **تجميل البيوت** يرغب والد أحمد في إنشاء شرفة لها شكل مثلَّث قائم. يريد أن يكون قطر المثلَّث 6 أمتار، وأن يكون ضلعا الزاوية القائمة متطابقين.

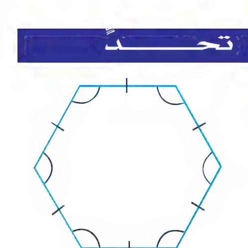
أ احسب طول كل ضلع من ضلعَيِ الزاوية القائمة.

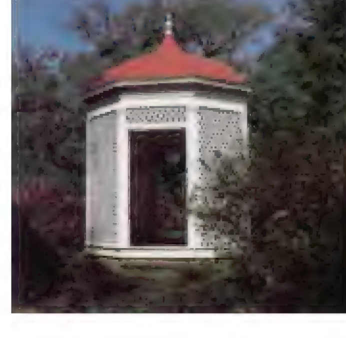
ب احسب مساحة الشرفة.



**تحدٍّ**

**35** **بناء** ترغب إدارة الحديقة العامة في بناء استراحة قاعدتها على شكلِ سداسي منتظم طول ضلعه 10أمتار. تبلغ كلفة رصف القاعدة 170 ألف دينار للمتر المربّع الواحد. استعمل النسب المثلَّثيّة لحساب كلفة رصف القاعدة.





## نظرة إلى الوراء



**حدِّد درجة كلّ حدودية.**

**36** $3x^2 - 5x^8 + 4x^3 + 2$

**37** $(x^2 - 9)(x^3 + 4)$

**حلِّل.**

**38** $2x^3 - 18x$

**39** $3x^3 - 7x^2 + 2x$

**اكتب كل مقدار على أبسط صورة، بعد تنسيب المقام.**

**40** $\frac{3}{\sqrt{2}}$

**41** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**42** $\frac{5}{1-\sqrt{2}}$

**43** $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

**احسب متوسِّط كل مجموعة قيَم، ثم احسب انحرافها المعياري.**

**44** 110; 119; 125; 130; 78; 100; 113; 121; 103; 99; 122; 107; 102

**45** 22; 26; 28; 17; 19; 24; 36; 25; 14; 17; 46; 53; 25; 18; 34; 12




## نظرة إلى الأمام

**46** **هندسة** إذا دارت نقطة $360^\circ$ حول مركز الدوران، فإن مسارها دائرة كاملة. ما زاوية الدوران التي تجعل مسار النقطة نصف دائرة؟ ربع دائرة؟



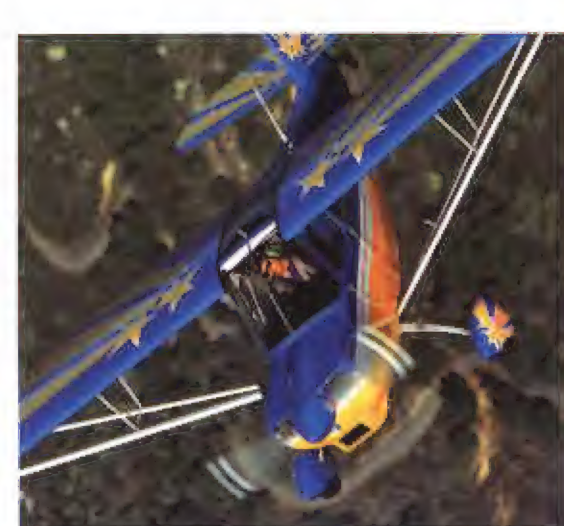

# زوايا الدوران Angles of Rotation



**الأهداف**

- يحدِّد الزاوية المرجعية لزاوية.
- يحدِّد النسب المثلَّثيّة لزاوية في وضعها القياسي.

**تطبيقات**
**طيـــــران**





**لماذا** يمكنك استعمال زوايا الدوران لوصف معدّل دوران محرّك طائرة مروحيّة.

تدور مروحة إحدى الطائرات 1100 دورة في الدقيقة. كم درجة تدور نقطة تقع على مروحة هذه الطائرة في ثانية واحدة؟

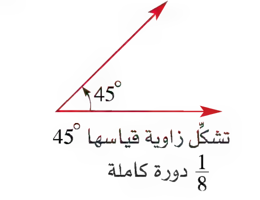
إذا كان تعريف الزاوية في الهندسة أنها الشكل المكوّن من نصفَيْ مستقيم يشتركان في نقطة الأصل، فإن تعريفها في علم المثلّثات أنها دوران نصف قطر حول نقطة الأصل فيه من موقع إلى آخر. كل موقع نصف قطر الذي يدور يحدِّد مع موقع الانطلاق زاوية تُدعى **زاوية الدوران Angle of Rotaion**. يستعمل الرياضيّون عادة الحرف اليوناني $\theta$ (ثيتا) لتسمية زاوية الدوران.

يُدعى موقع انطلاق نصف قطر **الضلع الأوّلي Initial side** للزاوية، ويُدعى موقع توقّفه **الضلع النهائي Terminal side** لها. تكون الزاوية في **الوضع القياسي Standard position** عندما يكون رأسها في نقطة الأصل من المستوي الإحداثي، ويقع ضلعها الأوّليّ فوق النصف الموجب من المحور الأول.

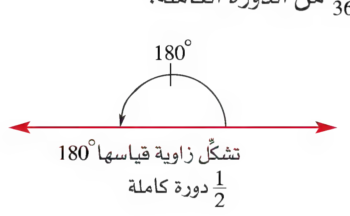
$y$ ، $x$ ، $+150^\circ$ عكس عقارب الساعة ، الضلع النهائي ، $-210^\circ$ مع عقارب الساعة ، الوضع القياسي

إذا جرى الدوران في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة، يكون قياس الزاوية **موجبًا Positive**. ويكون قياس الزاوية **سالبًا Negative** إذا جرى الدوران في اتّجاه حركة عقارب الساعة

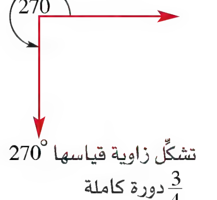
تُعتبر **الدرجة Degree** من أهم وحدات قياس الزاوية، ويُرمز إليها بالرمز ◦. ولمّا كان قياس الزاوية الناتجة عن دورة كاملة لشعاع، يُساوي $360^\circ$ ، فإن الدرجة تُعرَّف بأنها قياس الزاوية الناتجة من دوران نصف قطر $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة.




تشكّل زاوية قياسها $45^\circ$ $\frac{1}{8}$ دورة كاملة




تشكّل زاوية قياسها $180^\circ$ $\frac{1}{2}$ دورة كاملة




تشكّل زاوية قياسها $270^\circ$ $\frac{3}{4}$ دورة كاملة

**نقطة مراقبة** ما اتِّجاه دوران زاويته $-90^\circ$ ؟ $120^\circ$ ؟ ما الجزء الذي يُشكِّله كل من هذَيْن الدورانَيْن من دورة كاملة؟

## مثــــال 1

**بالعودة إلى المسألة المطروحة في أول الدرس، كم درجة تدور نقطة على مروحة تلك الطائرة في ثانية واحدة.**



**الحـل**

تدور المروحة 1100 دورة في الدقيقة. لذلك، تدور نقطة على مروحة الطائرة $1100 \times 360^\circ = 397\ 000^\circ$ في الدقيقة، وبالتالي تدور نقطة على مروحة الطائرة في ثانية واحدة $\frac{396\ 000^\circ}{60} = 6600^\circ$

**حــاولْ** تدور الأسطوانات الموسيقيَّة القديمة 33.3 دورة في الدقيقة. كم درجة تدور نقطة على الأسطوانة في ثانية واحدة؟

سوف تتعلَّم في الدرس الثالث كيف تحسب قيم النسب المثلَّثيّة لزاوية في وضعها القياسي، عندما يزيد قياسها على $90^\circ$ (أو ينقص عن $0^\circ$). لكي تتمكَّن من ذلك، سوف تحتاج إلى تحديد قياس الزاوية المرجعيَّة لزاوية في الوضع القياسي.

إذا كانت $\theta$ زاوية في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعيَّة Reference Angle** هي الزاوية الحادّة الموجبة المكوَّنة من الضلع النهائي للزاوية، وجزء المحور الأول (الموجب أو السالب) الأقرب إليه، علمًا أن الجزء الموجب من المحور الأول هو في الربعَيْن الأول والرابع، والجزء السالب هو في الربعَيْن الثاني والثالث.

الربع الأول
الربع الثاني
$\theta$
الزاوية المرجعية
الربع الثالث
الربع الرابع

## مثــــال 2

**ما الزاوية المرجعيَّة لكل زاوية؟**

أ $\theta = 94^\circ$

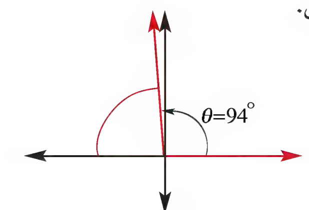
ب $\theta = 245^\circ$

ج $\theta = 290^\circ$

د $\theta = -110^\circ$

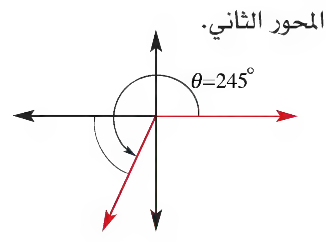
**الحـل**

أ يقع الضلع النهائي للزاوية $\theta = 94^\circ$ في الربع الثاني. استعمل الجزء السالب من المحور الأول.



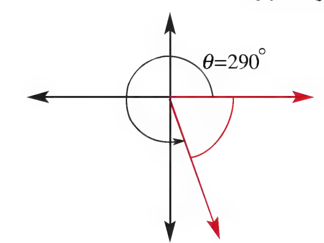

قياس الزاوية المرجعية $\left|180^\circ - 94^\circ\right| = 86^\circ$.

ب يقع الضلع النهائي للزاوية $\theta = 245^\circ$ في الربع الثالث. استعمل الجزء السالب من المحور الثاني.



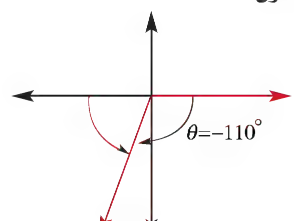

قياس الزاوية المرجعية $\left|180^\circ - 245^\circ\right| = 65^\circ$.

**ج** يقع الضلع النهائي للزاوية $\theta = 290^\circ$ في الربع الرابع . استعمل الجزء الموجب من المحور الأول.




قياس الزاوية المرجعية $|360^\circ - 290^\circ| = 70^\circ$ .

**د** يقع الضلع النهائي للزاوية $\theta = -110^\circ$ في الربع الثالث. استعمل الجزء السالب من المحور الأول.



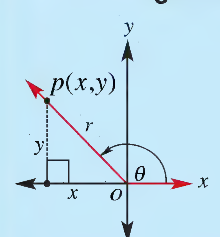

قياس الزاوية المرجعية $70 = |-180 - (-110)|$.

**حـــاولْ** ما الزاوية المرجعية للزاوية $\theta = 315^\circ$ والزاوية $\theta = -235^\circ$ في الوضع القياسي؟

**تفكير ناقد** ما عدد الزوايا الواقعة بين $0^\circ$ وَ $360^\circ$ والتي تتشارك في الزاوية المرجعية نفسها لزاوية معينة؟

إذا اعتبرت أن $x$ وَ $y$ إحداثيًا نقطة تقع على الضلع النهائي لزاوية في الوضع القياسي، فسوف يصبح بإمكانك تحديد إشارة كل نسبةٍ مثلَّثية للزّاوية باستعمال هذين الإحداثيين.

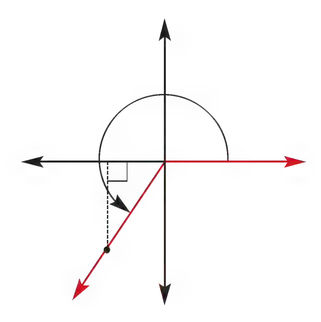
### النسب المثلَّثيّة للزاوية Trigonometric Ratios of $\theta$




إذا كانت $p(x, y)$ نقطة على الضلع النهائي للزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، فإن المسافة بين $P$ ونقطة الأصل في المستوى الإحداثي هي $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ ، $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ، $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ، $x \neq 0$

**مثـــــال 3** تقع النقطة $P(-2, -3)$ على الضلع النهائي لزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، احسب نسبها المثلَّثيّة.



**الحـل**

ارسم صورة. لديك $x = -2$ وَ $y = -3$ .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} \text{ ، } \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

**حـــاولْ** تقع النقطة $P(3, -5)$ على الضلع النهائي لزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، احسب نسبها المثلَّثيّة.

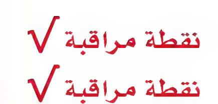
## النشاط

### استكشاف إشارات النسب المثلَّثيّة
### Exploring the Sign of Trigonometric Ratios

1. انسخ الجدول المقابل وأكمله مُحدِّدًا إشارة كل نسبة مثلَّثيّة للزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، وفقًا للربع الذي يحتوي ضلعها النهائي.

| النسبة المثلَّثيّة | الربع | | | |
|---|---|---|---|---|
| | الأول | الثاني | الثالث | الرابع |
| $\sin\theta$ | + | | | |
| $\cos\theta$ | | | | |
| $\tan\theta$ | | | | |

2. في أي ربع يقع الضلع النهائي للزاوية $\theta$ إذا كان $\sin\theta=-\frac{2}{7}$؟ $\cos\theta=-\frac{2}{7}$؟ $\tan\theta=-\frac{1}{5}$؟ أورِدْ جميع الإجابات الممكنة.



3. هل تؤثِّر قيمة $r$ في إشارة أيٍّ من النسب المثلَّثيّة؟ علِّل إجابتك. (نقطة مراقبة)
4. أيٌّ من الإحداثيَّين، $x$ أم $y$، يحدد إشارة كل من $\sin\theta$ وَ $\cos\theta$ وَ $\tan\theta$؟ (نقطة مراقبة)

إذا عرفت في أي ربع يقع الضلع النهائيّ لزاوية $\theta$ في الوضع القياسي وإحدى النسب المثلَّثيّة الثلاث للزاوية $\theta$ ، تستطيع أن تحسب النسبتين الباقيتَيْن، كما يبيِّن ذلك المثال 4.

### مثـــــال

**4** **احسب $\sin\theta$ وَ $\tan\theta$ علمًا بأن الزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، وأن ضلعها النهائي يقع في الربع الثاني، وأن $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ .**



**الحــل**

ارسم صورة واحسب إحداثيَّي النقطة $P$ .

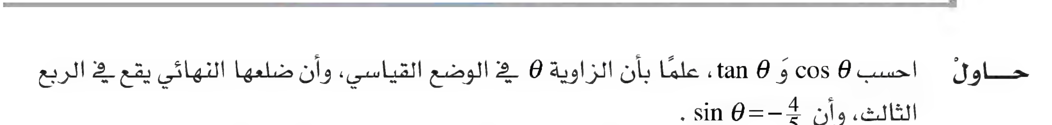
بما أن $\cos\theta=-\frac{3}{5}<0$ ، فإن $x$ سالب.

إذًا، $x=-3$ وَ $r=5$ . لحساب $y$، استعمل نظرية فيثاغورس.

$$5^2=(-3)^2+y^2$$
$$y^2=25-9=16$$
$$y=\pm\sqrt{16}=\pm4$$

$y=4$ $\qquad$ $y>0$ لأن النقطة $P(x,y)$ تقع في الربع الثاني.

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$



**حـــاولْ** احسب $\cos\theta$ وَ $\tan\theta$، علمًا بأن الزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، وأن ضلعها النهائي يقع في الربع الثالث، وأن $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ .

إذا تطابق الضلع النهائي لزاوية $\theta$ في الوضع القياسي مع المحور الثاني $(x=0)$، فإن $\tan\theta$ لايعود معرَّفًا.



نقطة مراقبة: احسب النسب المثلَّثيّة للزاوية $\theta=90^\circ$ .

## التمارين

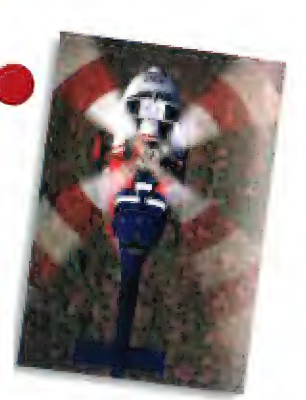
### التواصل في الرياضيات

**1** ما الفرق بين الزوايا في المثلَّث القائم وزوايا الدوران؟

**تطبيقات**

2 ما الاختلافات الممكنة بين النسب المثلَّثيّة لزاوية والنسب المثلَّثيّة لزاويتها المرجعيَّة؟ وما أسباب هذه الاختلافات؟

3 هل تحتاج إلى معرفة قياس زاوية لكي تحسب نسبها المثلَّثيّة؟ علِّل إجابتك.



## تمارين موجَّهة

4 **طيران** تدور المروحة الكبيرة لمروحيَّة 430 دورة في الدقيقة. كم درجة في الثانية تدور نقطة على المروحة؟

5 حدِّد الزاوية المرجعيَّة لكل من الزوايا $93^\circ$ وَ $280^\circ$ وَ $-36^\circ$ .

6 تقع النقطة $P(3, -2)$ على الضلع النهائي لزاوية $\theta$ في الوضع القياسي. احسب النسب المثلَّثيّة لهذه الزاوية.

7 احسب $\cos\theta$ وَ $\tan\theta$، علمًا بأن الزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، وأن ضلعها النهائي يقع في الربع الثالث، وأن $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ .

## تمارين وتطبيقات

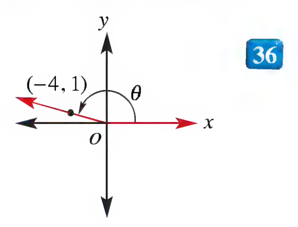
**ارسم كل زاوية في الوضع القياسي.**

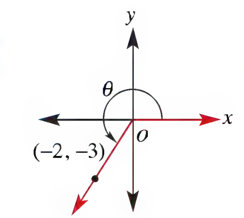
| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 $115^\circ$ | 9 $280^\circ$ | 10 $-300^\circ$ | 11 $-130^\circ$ |

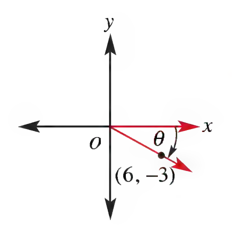
**حدِّد الزاوية المرجعيَّة لكل زاوية.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 $35^\circ$ | 13 $23^\circ$ | 14 $112^\circ$ | 15 $160^\circ$ |
| 16 $612^\circ$ | 17 $478^\circ$ | 18 $-135^\circ$ | 19 $-315^\circ$ |
| 20 $90^\circ$ | 21 $-180^\circ$ | 22 $-450^\circ$ | 23 $-485^\circ$ |
| 24 $540^\circ$ | 25 $270^\circ$ | 26 $225^\circ$ | 27 $195^\circ$ |
| 28 $410^\circ$ | 29 $560^\circ$ | 30 $-120^\circ$ | 31 $-280^\circ$ |
| 32 $-175^\circ$ | 33 $295^\circ$ | 34 $-395^\circ$ | 35 $-540^\circ$ |

**احسب النسب المثلَّثيّة للزاوية $\theta$.**

36



37



38



**احسب النسب المثلَّثيّة للزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، علمًا بأن ضلعها النهائيّ يحمل النقطة المُعطاة.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 39 $(3, 4)$ | 40 $(5, 2)$ | 41 $(-4, 2)$ | 42 $(-4, 6)$ |
| 43 $(\sqrt{3}, -3)$ | 44 $(2\sqrt{5}, -1)$ | 45 $(-4, -3)$ | 46 $(-1, -8)$ |

**لديك الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاوية $\theta$ في الوضع القياسيّ وقيمة نسبة مثلَّثيّة لها. احسب النسبة المثلَّثيّة المطلوبة.**

47 الأول؛ $\cos\theta = 0.25$ ؛ $\tan\theta$

48 الثالث؛ $\cos\theta = -0.50$ ؛ $\tan\theta$

49 الرابع؛ $\tan\theta = -1$ ؛ $\sin\theta$

50 الأول؛ $\tan\theta = 2$ ؛ $\sin\theta$

51 الثالث؛ $\sin\theta = -0.50$ ؛ $\cos\theta$

52 الثاني؛ $\sin\theta = 0.40$ ؛ $\cos\theta$

**حدِّد عدد الدورات الكاملة أو أجزاءها التي تمثِّلها الزاوية. حدِّد اتِّجاه الدوران: مع عقارب الساعة أم عكسه.**

53 $45^\circ$

54 $90^\circ$

55 $-180^\circ$

56 $-270^\circ$

57 $450^\circ$

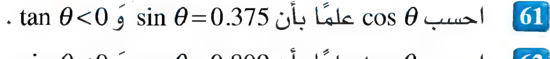
58 $720^\circ$

59 $-420^\circ$

60 $-640^\circ$


تحدٍّ

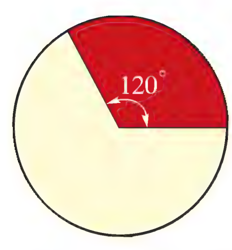
61 احسب $\cos\theta$ علمًا بأن $\sin\theta = 0.375$ وَ $\tan\theta < 0$ .



62 احسب $\tan\theta$ علمًا بأن $\cos\theta = 0.809$ وَ $\sin\theta < 0$ .


ربط

63 **احتمال** رمى سعيد سهمًا أصاب الدائرة، ما احتمال أن يكون السهم قد أصاب الجزء الأحمر؟




تطبيقات

64 **هندسة** تدور مروحة إحدى الطائرات 900 دورة في الدقيقة. كم درجة تدور نقطة على هذه المروحة في ثانية واحدة؟

65 **ملاحة** يستعمل ربابنة السفن وملاّحو الطائرات وحدة طول تُدعى **الميل البحري Notical Mile** لقياس المسافات. يساوي الميل البحري تقريبًا طول قوس على الكرة الأرضية محدَّد بزاوية مركزيَّة قياسها دقيقة واحدة (كل 60 دقيقة تساوي درجة واحدة). قطر الأرض عند خط الاستواء 12 756km تقريبًا.

أ) احسب محيط الأرض عند خط الاستواء.

ب) كم دقيقة يساوي محيط الأرض؟

ج) كم كيلومترًا يساوي الميل البحري؟

## نظرة إلى الوراء

66 حُلّ $x^2 - 8 = 188$ .

67 كم طريقة يُوجد لاختيار 4 أشخاص من 10؟

## نظرة إلى الأمام

**احسب النسب المثلَّثيّة للزاوية $\theta$ في الوضع القياسي، علمًا بأن ضلعها النهائي يحمل النقطة المُعطاة.**

68 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

69 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

70 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

الدرس 3

# القياس الدائري Radian Measure

**الأهداف**

- يحوِّل من القياس الستينيّ إلى القياس الدائريّ، وبالعكس.
- يحسب طول قوس على دائرة.

**لماذا** يُستعمل القياس الدائري لوصف الظواهر الدورية كموجات الزلازل والدورات المناخية، والحركة الدائرية لأجسام كالأقمار الاصطناعية.

**تطبيقات**
أرصاد جوية



يدور قمر اصطناعي يرصد الأحوال الجويّة على ارتفاع يقارب 35 750km عن سطح الأرض. ما **السرعة الخطّيّة للقمر Linear Speed**، إذا كان يدور حول الأرض مرّة كل 24 ساعة؟ ما سرعته الزاويّة؟

تعلّمت في الصفوف السابقة أن تقيس الزوايا باستعمال الدرجة. سوف تتعلّم في هذا الدرس أن تقيسها باستعمال وحدة قياس جديدة هي **الراديان Radian** . نظام القياس بالدرجة يُدعى **القياس الستيني** بينما يُدعى نظام القياس بالراديان **القياس الدائريّ**.

## النشاط

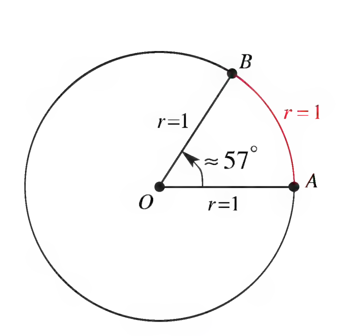
### استكشاف نسبة الدائرة Investigating Circle Ratio

يلزمك شريط قياس سنتيمتري وعبوات أسطوانية.

1. قِس قطر قاعدة عدد من العبوات المختلفة القياسات، وقِس محيط كل منها. دوِّن النتائج التي حصلت عليها في جدول.
2. احسب نسبة المحيط إلى القطر، لقاعدة كلّ عبوة، ودوِّن ذلك في الجدول.
3. تُقارب قيَم جميع هذه النسب قيمة عدد مشهور تعرفه. ما هو؟

**نقطة مراقبة √**

محيط دائرة نصف قطرها $r$ هو $2\pi r$ . بما أن نصف قطر دائرة الوحدة يساوي 1، فإن محيطها يساوي $2\pi$ .




يُعرَّف **الراديان** بأنه قياس زاوية مركزية في دائرة نصف قطرها $r$ ، تحدِّد قوسًا طوله $r$. إذا استعملت دائرة الوحدة، يكون الراديان قياس زاوية مركزية في دائرة الوحدة تحدِّد قوسًا طوله 1. ينتج من هذا التعريف أن القياس الدائري لزاوية قائمة هو ربع محيط دائرة الوحدة أي $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ راديان، وقياس زاوية دورة كاملة هو $2\pi$ راديان. بتعبير آخر: يساوي الراديان الواحد $\frac{1}{2\pi}\times 360^\circ \approx 57^\circ$ .

| تحويل قياس الزاوية | |
|---|---|
| **من الدرجة إلى الراديان** | **من الراديان إلى الدرجة** |
| اضرب في $\frac{\pi}{180}$ | اضرب في $\frac{180}{\pi}$ |

**مثال 1** حوِّل من الدرجة إلى الراديان أو من الراديان إلى الدرجة.



أ $40^\circ$ ب $3\pi$ راديان



**الحل**

أ $40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{9}$ ب $3\pi \times \frac{180^\circ}{\pi}=540^\circ$

**حاول** حوِّل $-120^\circ$ إلى راديان وَ $-\frac{2}{3}\pi$ إلى درجة.

**نقطة مراقبة √** زاوية قياسها $1^\circ$ . ما قياسها بالراديان؟



**مثال 2** احسب. أعطِ القيم المضبوطة.

أ $\sin\frac{\pi}{3}$ ب $\cos\frac{3\pi}{4}$ ج $\tan\frac{4\pi}{3}$





**الحل**

ابدأ بالتحويل من راديان إلى درجة، ثم احسب .



أ $\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=60^\circ$
$\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60^\circ$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب $\frac{3\pi}{4}\times\frac{180^\circ}{\pi}=135^\circ$
$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos 135^\circ$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

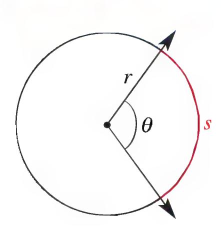
ج $\frac{4\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=240^\circ$
$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan 240^\circ$
$=\sqrt{3}$

**حاول** احسب $\tan\frac{5\pi}{4}$ وَ $\cos\frac{2\pi}{3}$ وَ $\sin\frac{3\pi}{2}$ .



**نقطة مراقبة √** الزوايا الخاصة هي الزوايا $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ . ارسم دائرة الوحدة، وارسم عليها الزوايا الخاصَّة، واكتب قياس كل منها بالراديان.

## طول القوس Arc Length




يبيِّن الشكل المقابل دائرة نصف قطرها $r$، وزاوية مركزيَّة قياسها $\theta$ راديان. يمكنك استعمال التناسب لإيجاد قاعدة لحساب طول القوس $s$ الذي تحدِّده الزاوية المركزيَّة:

قياس $\theta$ بالراديان ← $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r}$ → طول القوس الذي تحدِّده $\theta$

قياس الدائرة بالراديان ← → طول الدائرة

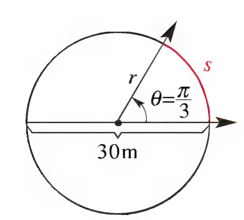
$$s = r\theta$$

**طول القوس Arc Length**

لحساب طول القوس $s$ الذي تحدِّده زاوية مركزية قياسها $\theta$ راديان، في دائرة نصف قطرها $r$ استعمل القاعدة $s = r\theta$.


**تفكير ناقد** هل تستطيع أن تعلِّل التعريف الذي أُعطي للراديان في أول الدرس؟

**مثـــــال 3** احسب طول القوس الذي تحدِّده زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{3}$ راديان، في دائرة قطرها 30m.



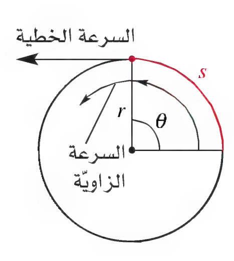

**الحـــل**

بما أن قطر الدائرة 30m، فإن نصف قطرها 15m.

$s = r\theta = 15 \times \frac{\pi}{3} = 5\pi$

بلغ طول القوس، إذًا، $5\pi$ m أو 15.7m تقريبًا.

**حـــاولْ** احسب طول القوس الذي تحدِّده زاوية مركزية قياسها 0.6 راديان في دائرة نصف قطرها 1.25m.



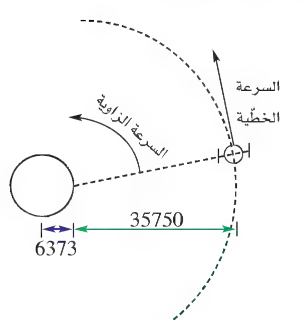

عندما يتحرّك جسم بسرعة منتظمة في مسار دائري نصف قطره $r$، فإن **السرعة الخطّية Linear Speed** لهذا الجسم هي نسبة طول القوس $s$ الذي يقطعه الجسم إلى الزمن $t$، أي $\frac{s}{t}$ أو $\frac{r\theta}{t}$، حيث تمثِّل $\theta$ قياس زاوية دوران الجسم بالراديان.

**السرعة الزاويّة Angular Speed** للجسم هي نسبة قياس زاوية دورانه $\theta$ بالراديان إلى الزمن $t$. إنها $\frac{\theta}{t}$.



**مثـــال** 4 **بالعودة إلى المسألة المطروحة في أول الدرس، احسب السرعة الخطّية والسرعة الزاويّة للقمر الاصطناعي، علمًا بأن نصف قطر الأرض يساوي 6 373km تقريبًا.**

**تطبيقات**
**أرصاد جوية**




**الحل**

ابدأ بحساب نصف قطر مسار القمر الاصطناعي.

نصف قطر المسار = نصف قطر الأرض + ارتفاع القمر

= 6 373 + 35 750

= 42 123

احسب السرعة الخطّية للقمر عندما يقوم بدورة كاملة ($2\pi$ راديان) في 24 ساعة.

السرعة الخطّية $\frac{r\theta}{t} = \frac{42123 \times 2\pi}{24} \approx 11028$

سرعة القمر الاصطناعي الخطّية، إذًا، 11 208km في الساعة تقريبًا.

احسب الآن السرعة الزاويّة للقمر الاصطناعي باستعمال القاعدة $\frac{\theta}{t}$ .

السرعة الزاويّة $\frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ .

سرعة القمر الاصطناعي الزاويّة، إذًا، $\frac{\pi}{12}$ راديان في الساعة.

**حــاولْ** احسب السرعة الخطّية والسرعة الزاويّة لشخص يقف عند خط الإستواء على الأرض،أي يبعد 6 373km عن مركزها.



# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1 ما القياس الدائري للزاوية؟ بمَ يختلف عن قياسها الستّيني؟

2 كيف تحوِّل من الراديان إلى الدرجة وبالعكس؟

3 كيف يتغيَّر طول قوس محدَّد بزاوية مركزية في دائرة، إذا تضاعف نصف قطر الدائرة؟

4 ما السرعة الخطّية والسرعة الزاويّة لجسم يتحرَّك في مسار دائري؟ما الفرق بينهما؟



## تمارين موجَّهة

**حوِّل من الدرجة إلى الراديان، أو من الراديان إلى الدرجة.**

5 $120^\circ$

6 $\frac{\pi}{4}$ راديان

**احسب. أعطِ القيم المضبوطة.**

7 $\sin \frac{2\pi}{3}$

8 $\cos \frac{5\pi}{4}$

9 $\tan \frac{5\pi}{3}$

10 احسب طول القوس الذي تحدِّده زاوية مركزية قياسها $\frac{4\pi}{3}$ في دائرة قطرها 90cm.

11 **تسلية** يبلغ قطر مطعم دوّار في قمَّة برج 60m، وهو ويدور دورة كاملة كل 58 دقيقة. احسب السرعة الخطّية والسرعة الزاويّة لشخص يجلس قرب نافذة من نوافذ المطعم.

## تمارين وتطبيقات

**حوِّل من القياس الستّيني إلى القياس الدائري.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 $180^\circ$ | 13 $90^\circ$ | 14 $360^\circ$ | 15 $270^\circ$ |
| 16 $-30^\circ$ | 17 $-120^\circ$ | 18 $-210^\circ$ | 19 $-270^\circ$ |
| 20 $720^\circ$ | 21 $930^\circ$ | 22 $80^\circ$ | 23 $160^\circ$ |

**حوِّل من الراديان إلى الدرجة. أجبْ مقرِّبًا إلى أقرب عشر من الدرجة.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 $2\pi$ | 25 $\pi$ | 26 $\frac{\pi}{2}$ | 27 $\frac{\pi}{4}$ |
| 28 $\frac{\pi}{3}$ | 29 $\frac{\pi}{6}$ | 30 $-\frac{\pi}{2}$ | 31 $-\frac{\pi}{4}$ |
| 32 $-3.91$ | 33 $-9.799$ | 34 $9.27$ | 35 $4.96$ |

**احسب. أعطِ القيم المضبوطة .**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 $\sin \pi$ | 37 $\cos \pi$ | 38 $\cos \frac{\pi}{3}$ | 39 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ |
| 40 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ | 41 $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ | 42 $\tan \pi$ | 43 $\tan \frac{\pi}{4}$ |
| 44 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | 45 $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ | 46 $\sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)$ | 47 $\cos 5\pi$ |

**احسب طول القوس الذي تحدِّده كل زاوية مركزيَّة في دائرة قطرها 10m.**

| | | |
|---|---|---|
| 48 3.8 راديان | 49 2.4 راديان | 50 45 راديان |
| 51 72 راديان | 52 4.28 راديان | 53 0.67 راديان |
| 54 $\frac{\pi}{3}$ راديان | 55 $\frac{2\pi}{3}$ راديان | 56 $\frac{\pi}{4}$ راديان |
| 57 $\frac{\pi}{2}$ راديان | 58 $\frac{7\pi}{4}$ راديان | 59 $\frac{7\pi}{6}$ راديان |

**ربط**

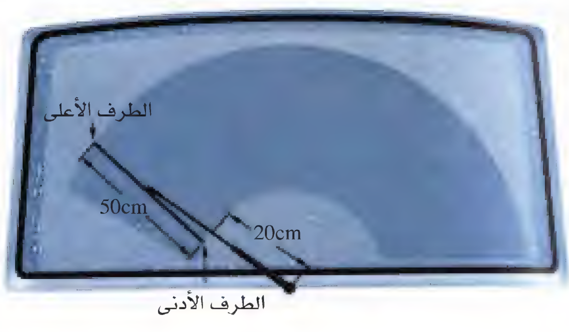
**هندسة** **مساحة القطاع الدائري Area of Sector** المحدَّد بدائرة مركزية قياسها $\theta$ راديان هو جزء قيمته $\frac{\theta}{2\pi}$ من مساحة الدائرة $\pi r^2$ ، أي $A = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}$ .

60 احسب مساحة القطاع الدائري المحدَّد بزاوية مركزية قياسها $\frac{7\pi}{6}$ في دائرة نصف قطرها 20m.

61 احسب قياس الزاوية المركزية في دائرة نصف قطرها 12، علمًا بأن مساحة القطاع الدائري الذي تحدِّده الزاوية تبلغ $55.5\text{m}^2$ .

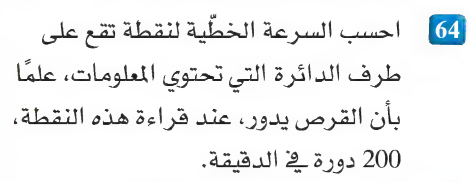
**تطبيقات**

**هندسة** تدور ماسحة الماء على زجاج السيّارة زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ راديان كل 0.9 من الثانية.




62 احسب المسافة التي تقطعها نقطة على طرف الماسحة الأعلى ونقطة على طرفها الأسفل، عندما تدور الماسحة $\frac{3\pi}{4}$ راديان.

**63** احسب السرعة الخطّيّة لكل من النقطتين السابقتين بالسنتيمتر في الثانية.
احسب هاتَيْن السرعتَيْن بالكيلومتر في الساعة.



**تكنولوجيا** يُدير قارئ الأقراص المدمجة القرص بسرعة زاويَّة ثابتة، غير أن السرعة الخطّيّة لنقطة على القرص تتغيّر تبعًا لنصف قطر الدائرة التي تحملها. افترض أن المعطيات مكتوبة على القرص داخل دائرة قطرها 6cm.

**64** احسب السرعة الخطّيّة لنقطة تقع على طرف الدائرة التي تحتوي المعلومات، علمًا بأن القرص يدور، عند قراءة هذه النقطة، 200 دورة في الدقيقة.

**65** احسب السرعة الخطّيّة لنقطة تقع على مسافة 2cm من الطرف الخارجي للدائرة التي تحتوي المعلومات، علمًا بأن القرص يدور، عند قراءة هذه النقطة، 240 دورة في الدقيقة.

**سباق سيّارات** تتسابق السيّارات على حلبة دائرية نصف قطرها 300m. قطعت إحدى السيّارات قوسًا قياس زاويته المركزية $120^\circ$ في 17.5 ثانية.



**66** احسب السرعة الخطّيّة لهذه السيّارة بالأمتار في الثانية.

**67** احسب السرعة الزاويّة لهذه السيّارة بالراديان في الثانية.

## نظرة إلى الوراء

**حُلّ كل مُتباينة. مثِّل مجموعة الحلّ على محور الأعداد.**

**68** $|x-4| \le -2$ **69** $|2-x| > 1$ **70** $|3x+5| < 4$

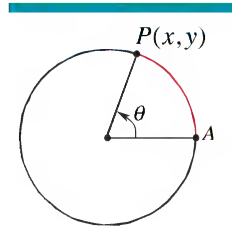
**حُلّ كل معادلة نسبيَّة، وتحقَّق من الحلّ بأي طريقة.**



**71** $\frac{x-3}{x+5} = \frac{x}{x+1}$ **72** $\frac{y}{y-4} - \frac{y}{y+2} = \frac{5}{y^2-2y-8}$

## نظرة إلى الأمام

**73** احسب $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$






# المتطابقات المثلَّثيّة الأساسيَّة

## Fundamental Trigonometric Identies



**الأهداف**

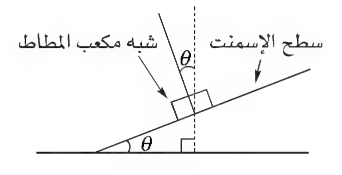
- يبرهن المتطابقات المثلَّثيّة الأساسيَّة.
- يستعمل المتطابقات المثلَّثيّة الأساسيَّة لتبسيط المقادير المثلَّثيّة.

**لماذا**

يمكنك استعمال المتطابقات المثلَّثيَة الأساسية لكتابة مقدار مثلَّثي بدلالة نسبة مثلَّثية واحدة، ما يساعدك على حلّ العديد من مسائل الحياة اليومية، كتحديد زاوية الانزلاق التي تجعل شبه مكعَب من المطاط، وُضع على سطح من الإسمنت، يبدأ بالانزلاق.

**تطبيقات**
**فيزياء**

متوازي مستطيلات من المطّاط وُضع على سطح من الإسمنت، يمكن رفع أحد جوانبه تدريجيًّا. كم ستكون زاوية الانحناء عندما يبدأ متوازي مستطيلات بالانزلاق؟ يستعمل العلماء هذه الزاوية لإيجاد **مُعامل الاحتكاك الثابت** **Coefficient of Static Friction** $\mu_s$ (اقرأ «ميو أس») بين المطّاط والإسمنت. يبلغ هذا المُعامل 1.4.




ما يمنع انزلاق متوازي مستطيلات قوّة يُعبَّر عنها بالمقدار $\mu_s mg \cos\theta$، حيث يرمز $m$ إلى كتلة شبه المكعَّب، ويرمز $g$ إلى تسارع الجاذبية. أما القوّة التي تدفع إلى الانزلاق، فيُعبَّر عنها بالمقدار $mg \sin\theta$. يبدأ الانزلاق عندما تتساوى القوّتان، أي عندما

$$1.4mg \cos\theta = mg \sin\theta$$

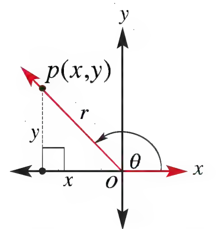
استعمل هذه المعادلة لحساب الزاوية $\theta$، التي تُدعى **زاوية الانزلاق Slide Angle**.

**المتطابقات المثلَّثيّة Trigonometric Identies** معادلات تبقى صحيحة مهما تبدَّلت قيَم المتغيِّرات الواردة فيها. تذكَّر أنّ إحداثيَّيّ نقطة على الضلع النهائيّ لزاوية $\theta$ في الوضع القياسي تسمح بحساب النسب المثلَّثيّة لهذه الزاوية، كما يلي:

$\sin\theta=\frac{y}{r}$ ، $\cos\theta=\frac{x}{r}$ ، $\tan\theta=\frac{y}{x}$ ، $x\neq 0$

حيث يمثِّل $\pi$ المسافة بين النقطة ونقطة الأصل في المستوي الإحداثيّ.

**مثـــــال** 1 برهن المتطابقة $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ .




الحـل

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{r}\div\frac{x}{r}=\frac{y}{x}=\tan\theta$ .

يمكنك أن تُبرهن المتطابقات الأخرى بالطريقة نفسها، أو باستعمال نظرية فيثاغورس.

**المتطابقات المثلَّثيّة الأساسيّة Fundamental Trigonometric Identities**

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \sin^2\theta=1-\cos^2\theta \qquad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$


**مثـــــال** 2 برهن المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ .

الحـل

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2+x^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$$

**حـــاولْ** برهن المتطابقة $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ .

يمكنك استعمال المتطابقات المثلَّثيّة لتبسيط المقادير المثلَّثيّة، وكتابتها بدلالة نسبة مثلَّثيّة واحدة.


**مثـــــال** 3 اكتب المقدار $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ بدلالة نسبة مثلَّثيّة واحدة.

الحـل

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}=\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}=1+\cos\theta$$

**حـــاولْ** اكتب المقدار $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$ بدلالة نسبة مثلَّثيّة واحدة.

**مثـــــال**

4 بالعودة إلى المسألة المطروحة في أول الدرس، **استعمل المساواة $mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$ لتحديد زاوية الانزلاق في كل حالة.**



أ انزلاق المطّاط على الإسمنت ؛ $\mu_s = 1.4$ .

ب انزلاق الزجاج على معدن مزيَّت ؛ $\mu_s = 0.25$ .

الحـل

أ
$$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$$
$$mg \sin \theta = 1.4 mg \cos \theta$$
$$\sin \theta = 1.4 \cos \theta$$
$$\tan \theta = 1.4$$
$$\theta \approx 54.5^\circ$$

ب
$$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$$
$$mg \sin \theta = 0.25 mg \cos \theta$$
$$\sin \theta = 0.25 \cos \theta$$
$$\tan \theta = 0.25$$
$$\theta \approx 14.0^\circ$$

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1 ما العلاقة بين الجيب وجيب التمام والظل؟

2 ما العلاقة بين المتطابقة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ونظرية فيثاغورس؟

## تمارين موجَّهة

3 برهن المتطابقة $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ .

4 اكتب المقدار $\frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta}$ بدلالة نسبة مثلَّثيّة واحدة.

5 اكتب $\frac{1}{\tan^2 \theta}$ بدلالة $\sin \theta$ .

**تطبيـــقات**

6 **فيزياء** حدِّد زاوية الانزلاق لنوع من المطّاط على الإسمنت، حيث $\mu_s = 1.2$ .

## تمارين وتطبيقات

**برهن كل متطابقة، مستعملاً تعريفات الدوال المثلَّثيّة.**

7 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

8 $\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$

**اكتب كل مقدار مثلَّثيّ بدلالة نسبة مثلَّثيّة واحدة.**

9 $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$

10 $\tan\theta\cos\theta$

11 $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

12 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$

**اكتب كل مقدار مثلَّثيّ بدلالة $\cos\theta$ .**

13 $2\sin^2\theta - 1$

14 $\left(1 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left(1 - \sin^2\theta\right)$

15 $\left(1 - \frac{1}{\tan^2\theta}\right)\left(1 + \frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

16 $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

**اكتب كل مقدار مثلَّثيّ بدلالة $\sin\theta$ .**

17 $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$

18 $\frac{1}{\tan^2\theta}$

19 $\cos^2\theta\tan^2\theta + \frac{1}{\sin\theta}$

20 $\tan^2\theta\sin^2\theta$

**استعمل المتطابقات المثلَّثيّة للتأكُّد من صحَّة كلٍّ مما يلي:**

21 $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta - 1} = -\frac{1}{\cos\theta}$

22 $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta - 1} = -\frac{1}{\sin\theta}$

**ربط**

23 اكتب كلاًّ من $\tan\theta$ وَ $\sin\theta$ بدلالة $\cos\theta$ .

**تطبيقات**

**فيزياء** بالعودة إلى مسألة الاحتكاك في أول الدرس، استعمل المعادلة $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$ لتحديد زاوية الانزلاق لكل جسم.



24 خشب مشمَّع على الثلج؛ $\mu_s = 0.14$

25 خشب على خشب ؛ $\mu_s = 0.4$

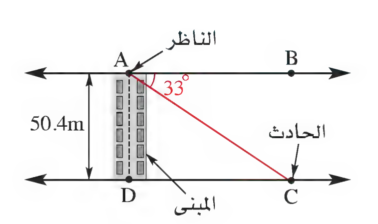
26 خشب على قرميد ؛ $\mu_s = 0.6$

27 حرير على حرير؛ $\mu_s = 0.25$

## نظرة إلى الوراء

**28** ارسم بيان الدالّة $y=2(x-3)^2+5$ . ما إحداثيّات رأس القطع المكافئ؟

**29** في المخطَّط المقابل، تُمثِّل الزاوية $\widehat{BAC}$ زاوية الانخفاض. وتمثّل النقطة $A$ عين الشخص الواقف على سطح المبنى والناظر إلى حادث سَير في النقطة $C$ . كم يبعد مكان الحادث عن النقطة $D$ في أسفل المبنى؟ أجبْ مقرِّبًا إلى أقرب جزء من مئة من المتر.



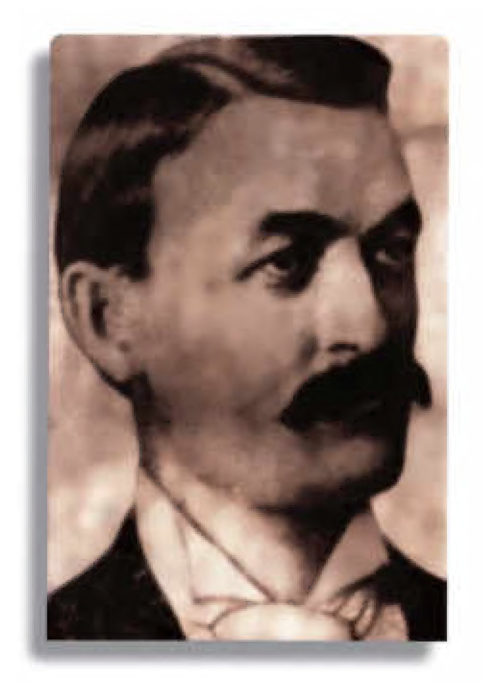

## نظرة إلى الأمام

**30** عوِّض عن $\sin\theta$ بالمجهول $x$ في المعادلة المثلَّثيّة $\sin^2\theta+2\sin\theta-3=0$ . حُلَّ المعادلة التربيعيّة التي حصلت عليها، ثم استنتج قيَم الزاوية $\theta$ التي تحقّق المعادلة المثلَّثيّة.




# دولاب مدينة الملاهي

من أهم التسليات في مدينة الألعاب، ركوب الدولاب الكبير والنظر إلى المدينة من ارتفاعات مختلفة، تتغيَّر مع دوران الدولاب. كان أول من بنى مثل هذا الدولاب رجل أمريكيّ يُدعى جورج فيريس، وكان ذلك بمناسبة المعرض الدولي في مدينة شيكاغو الأميركية سنة 1893 ميلادية. يبلغ قطر الدولاب في إحدى مدن الألعاب 40m، ويقع محوره على ارتفاع 21m. يحمل الدولاب 40 مقصورة، تتَّسع الواحدة منها لستة أشخاص. ويكمل الدولاب دورة واحدة كل 440 ثانية.



## النشـاط 1

أنشئ نموذجًا لدولاب مدينة الألعاب في المستوي الإحداثي، واضعًا محور الدولاب في نقطة الأصل. أنشئ جدول قيَم لبعد نقطة على طرف الدولاب عن المحور الأوَّل، كلّما دار الدولاب، مستعملاً زوايا الدوران التالية: $0^\circ$ ، $90^\circ$ ، $180^\circ$ ، $270^\circ$ ، ... ، $810^\circ$ مثِّل في المستوي الإحداثيّ، كل زوج مرتَّب مكوَّن من زاوية دوران والارتفاع العائد إليها، محمِّلاً الزوايا على المحور الأول. صل بين النقاط برسم بيانيّ مناسب.

## النشـاط 2

أنشئ جدول قيَم لارتفاع راكب (وكأنه على طرف الدولاب) عن مستوى الأرض، كلّما تغيَّرت زاوية الدوران. استعمل زوايا الدوران التي استعملتها في النشاط 1. مثّل، في المستوي الإحداثيّ، كل زوج مرتَّب مكوَّن من زاوية دوران وارتفاع الراكب العائد إليها، محمِّلاً الزوايا على المحور الأول. صلْ بين النقاط برسم بيانيٍّ مناسب.

## النشـاط 3

1. استعمل الجدول الذي أنشأته في النَّشاط 2 لتحويل وحدات المحور الأول من الدرجات إلى الزمن محسوبًا بالثواني استنادًا إلى أن الدولاب يتم دورته كل 440 ثانية. مثِّل، في المستوي الإحداثيّ، كل زوج مرتَّب مكوَّن من زمن بالثواني، وارتفاع الراكب عند هذا الزمن، محمِّلاً الثواني على المحور الأول. صلْ بين النقاط برسم بيانيّ مناسب.

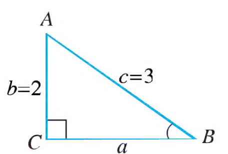
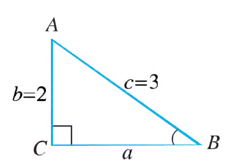
2. احسب السرعة الخطّية للراكب بالكيلومترات في الساعة.



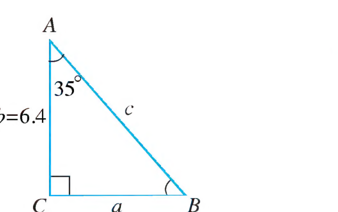
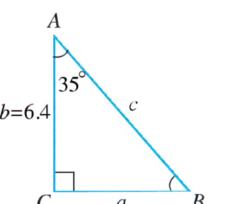
# 8 مـــراجعـــة

حُلَّ كلَّ مثلَّث قائم.

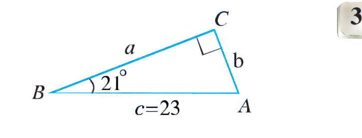
**1**

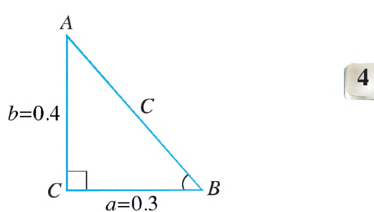
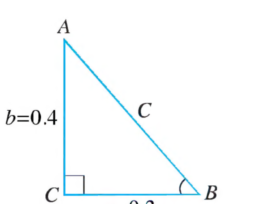

**2**


**3**




**4**


حدِّد الزاوية المرجعية لكل زاوية.

| | | |
|---|---|---|
| **5** $270^\circ$ | **6** $150^\circ$ | **7** $-135^\circ$ |
| **8** $-225^\circ$ | **9** $380^\circ$ | **10** $440^\circ$ |
| **11** $1\,028^\circ$ | **12** $973^\circ$ | **13** $-515^\circ$ |

احسب. أعطِ القيم مضبوطة.

| | |
|---|---|
| **14** $\cos 135^\circ$ | **15** $\sin 315^\circ$ |
| **16** $\tan 225^\circ$ | **17** $\cos 0^\circ$ |
| **18** $\sin(-270^\circ)$ | **19** $\cos(-180^\circ)$ |
| **20** $\tan(-90^\circ)$ | **21** $\cos 675^\circ$ |
| **22** $\sin 600^\circ$ | **23** $\tan 765^\circ$ |

تقع النقطة $P$ على تقاطع دائرة، مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها $r$، مع الضلع النهائي للزاوية $\theta$ في الوضع القياسي. حدِّد إحداثيَيْ $p$.

**24** $\theta = 60^\circ$ ؛ $r = 1$

**25** $\theta = -30^\circ$ ؛ $r = 2$

**26** $\theta = 240^\circ$ ؛ $r = 5$

**27** $\theta = -240^\circ$ ؛ $r = 3$

حوِّل من الدرجة إلى الراديان، أو من الراديان إلى الدرجة. أجبْ مقرَّبًا إلى أقرب عُشر من الدرجة.

**28** $78^\circ$

**29** $334.61^\circ$

**30** $-230^\circ$

**31** $\frac{\pi}{7}$ راديان

**32** $-\frac{15\pi}{16}$ راديان

**33** 8.87 راديان

**34** احسب طول القوس المحدَّد بزاوية مركزية قياسها $30^\circ$ في دائرة نصف قطرها 4.5m.

اكتب كل مقدار مثلَّثيّ بدلالة نسبة مثلَّثيّة واحدة.

**35** $\cos^2\theta\tan^2\theta$

**36** $\tan^2\theta\frac{1}{\cos^2\theta}$

**37** $\frac{\cos^2\theta}{\tan^2\theta+1}$

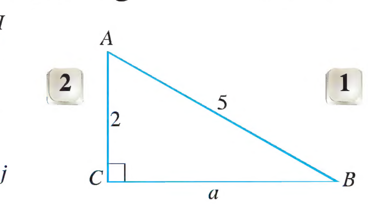
**38** $\frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta-1}$



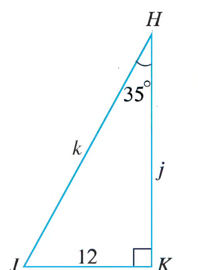
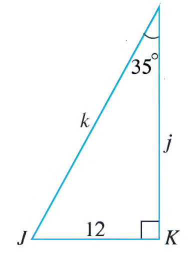
# اختبار الفصل

حُلّ كل مثلَّث. احسب قياسات الزوايا مقرَّبة إلى أقرب درجة، وقياسات الأضلاع مقرَّبة إلى أقرب عُشر.

**1**




**2**


**3** صنع سامي ثُمانيًّا منتظمًا حين قصّ مثلّثات متوازنة عند الرؤوس الأربعة لمربَّع ضلعه 10cm. ماطول ضلع الثماني؟

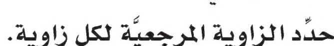
10cm

حدِّد الزاوية المرجعيَّة لكل زاوية.

**4** $137^\circ$ **5** $515^\circ$ **6** $38^c$ **7** $1\,729^\circ$

احسب النسبة المثلَّثية المطلوبة للزاوية $\theta$ بمعرفة الربع الذي يقع فيه ضلعها النهائيّ في وضعها القياسي، والنسبة المثلّثية المعطاة.

**8** الربع الرابع؛ $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ؛ $\sin\theta =$ ______



**9** الربع الثاني؛ $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

احسب كل نسبة مثلَّثيّة. أعطِ الجواب مضبوطًا.

**10** $\sin 330^\circ$ **11** $\cos(-150^\circ)$ **12** $\sin 720^\circ$

**13** $\tan(-765)$ **14** $\cos 300^\circ$ **15** $\tan 270^\circ$

احسب إحداثيَّيْ نقطة تقاطع دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $r$، مع الضلع النهائي للزاوية $\theta$ في وضعها القياسي. أعطِ الإجابات مضبوطة.

**16** $\theta = 30^\circ$ ؛ $r = 5$

**17** $\theta = 225^\circ$ ؛ $r = 12$

**18** $\theta = -150^\circ$ ؛ $r = 4$

**19** $\theta = 300^\circ$ ؛ $r = 8$

**20** **جبال** يبلغ انحدار جبل $\frac{7}{12}$ . هذا يعني أن الجبل يرتفع 7m مُقابل 12m أفقيًّا. ما زاوية الارتفاع لهذا الجبل؟

حوِّل من الدرجة إلى الراديان، أو بالعكس. وأعطِ الإجابات مضبوطة.

**21** $315^\circ$ **22** $-150^\circ$ **23** $495^\circ$

**24** $\frac{\pi}{12}$ **25** $\frac{5\pi}{4}$ **26** $-\frac{5\pi}{3}$

**27** **صناعة** يبلغ قطر مروحة هوائيَّة 12cm، وهي تدور بسرعة $33\frac{1}{3}$ دورة في الدقيقة. ما السرعة الخطّية لنقطة تقع على بعد 4cm من محور المروحة؟

احسب جميع القيَم الممكنة للزاوية $\theta$ $(0^\circ < \theta < 360^\circ)$ اذا كان:

**28** $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **29** $\cos\theta = \frac{1}{2}$

**30** $\tan\theta = 1$ **31** $\tan\theta = \sqrt{3}$

اكتب كل مقدار، باستعمال نسبة مثلَّثيّة واحدة.

**32** $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta} \times \cos\theta$

**33** $\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta - \sin^2\theta$

**34** $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

احسب إحداثيَّيْ كل نقطة بدورانٍ مركزه نقطة الأصل وزاويته معطاة.

**35** $(0.8)$ ؛ $30^\circ$ **36** $(-2.0)$ ؛ $-60^\circ$

**37** طول عقرب الدقائق في ساعة 3cm . ما المسافة التي يقطعها رأسه في 5 دقائق؟

# 8 اختبار تراكمي

**1** يتألَّف مجال الدالَّة $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ من جميع الأعداد الحقيقيّة باستثناء:

أ $1$   ب $-1$   ج $-\frac{3}{2}$   د $\frac{3}{2}$

**2** أيٌّ من الحدوديّات تساوي الحدوديَّة $(2x^3-x^4)+(3x^2-5)-(x^2-x^4+1)$؟

أ $-2x^4+2x^3+3x^2-6$

ب $2x^3+2x^2$

ج $2x^3+2x^2-6$

د $2x^3+2x^2+4$

**3** ما الإحداثيّ الأول لرأس القطع المكافئ $f(x)=2x^2-4x+1$ ؟

أ $-1$   ب $1$   ج $2$   د $-\frac{1}{2}$

**4** أي نوع من الأعداد لا يمكن كتابته على صورة نسبة عددَيْن صحيحَيْن؟

أ الأوَّليّة   ب الصحيحة

ج النسبيَّة   د غير النسبيَّة

**5** حُلّ $|2x+5|=11$ .

أ $-3; 3$   ب $-8; 8$

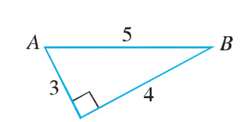
ج $-8; 3$   د $-3; 8$

**6** يرتبط المتغيِّران $x$ وَ $y$ بعلاقة تغيُّر طردي. ما ثابت التغيُّر في هذه العلاقة، علمًا بأن $y=8$ عندما $x=4$ ؟

أ $\frac{1}{3}$   ب $2$   ج $32$   د $-2$

**7** ما قيمة المقدار $3(\sqrt{45})^2$ ؟

**استعمل المثلَّث لحساب النسب المثلَّثيّة.**




**8** $\sin A$

**9** $\cos A$

**10** $\tan B$

**11** $\sin B$

**12** حُلَّ المعادلة التربيعيَّة $5x^2+x-2=0$ مستخدمًا القانون.

**13** حُلَّ المُتباينة النسبيَّة $\frac{5}{x-3}>\frac{6}{x-2}$ .

**14** اكتب معادلة على الصورة العامة للمستقيم المار بالنقطة $(-3, 4)$ ، والمتعامد مع المستقيم $y=3x-5$ .

**15** بسِّط المقدار $\frac{6x^2}{3x+12}\div\frac{x}{x+4}$ .

**16** حدِّد مجال الدالَّة $f(x)=\sqrt{2-3x}$ .

**17** حلِّل المقدار $3y(5x+2)-4(5x+2)$ .

**18** ما قيمة $\sin\frac{\pi}{2}$ ؟

**19** ما الزاوية المرجعيَّة للزّاوية $640^\circ$ ؟

**20** **احتمال** بكم طريقة يُمكن اختيار رئيس ونائب رئيس من أعضاء هيئة مؤلَّفة من 15 عضوًا؟

**21** ما العدد التالي في النمط 50، 46، 42، ...؟

**22** حوِّل $\frac{3\pi}{5}$ راديان إلى درجات.

**23** ما زاوية جيب تمامها يساوي جيب $30^\circ$ ؟

**24** **احتمال** رمى بروا مكعَّب الأعداد. ما احتمال أن يحصل على عدد زوجي أو على 1؟